

临界曲线附近的微引力透镜效应模拟*

杨絮柳^{1,2} 陈雪纯^{1,2} 郑文雯^{1,2} 罗煜^{1,3†}

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210023)

(2 中国科学技术大学天文与空间科学学院 合肥 230026)

(3 国家基础学科公共科学数据中心 北京 100190)

摘要 在光滑物质分布模型下, 临界曲线是强引力透镜系统中像平面上一条放大率为无穷的线, 而考虑少量离散质量的微透镜效应后, 源平面上的放大率分布会出现复杂的结构, 为暗物质成分的探测提供了一种有效途径. 模拟临界曲线附近微透镜效应存在临界曲线上放大率无穷大和计算量巨大的困难. 要达到所需的模拟精度, 直接使用传统的光线追踪算法需要巨大的计算资源. 为此发展了一个能实现海量计算的Graphics Processing Unit (GPU)并行方法来模拟临界曲线附近的微引力透镜效应. 在型号为NVIDIA Tesla V100S PCIe 32 GB的GPU上, 对于需要处理13000多个微透镜天体、发射 10^{13} 量级光线的模拟, 耗时在7000 s左右. 在GPU并行的基础上, 与直接的光线追踪算法相比, 插值近似的引入使计算速度提升约两个数量级. 利用该方法生成80个放大率分布图, 并从中抽取800条光变曲线, 进行了微焦散线数密度和峰值放大率的统计.

关键词 引力透镜; 强引力透镜, 引力透镜; 微引力透镜, 方法: 数值

中图分类号: P159; **文献标识码**: A

1 引言

星系团作为最大的强引力透镜天体, 能放大宇宙学距离上的源并产生多重像. 理论上, 星系团强引力透镜系统中, 像平面临界曲线上的放大率为无穷大. 临界曲线对应到源平面上为焦散线^[1], 当背景源从焦散线内部穿越到外部时, 背景源的两个像从两边接近临界曲线, 在临界曲线附近达到峰值放大率, 最后并合消失^[2].

星系团强引力透镜产生背景源多像的同时, 星系团内恒星、黑洞等离散物质也会使背景源的光发生偏折, 产生微引力透镜效应, 从而破坏星系团强引力透镜模型所预言的规则焦散线和临界曲线. 超高放大率区由一条线变成弥散的条带, 从而提高了高红移点源被放大观测的概率^[3].

Kelly等人最早在2016年探测到星系团极端放大背景恒星的事件^[4-6]. 红移为1.49的蓝巨星在红移为0.54的星系团MACSJ1149的强引力透镜作用下被放大2000倍以上. 所成的像位于星系团强引力透镜模型临界曲线附近. 其光变曲线出现持续几周的明显流量增加, 该像消失不久后, 临界曲线另一侧又探测到一例暂现源, 这一事件可以用强透镜加微引力透镜效应很好的解释. 之后, Rodney等^[7]、Chen等^[8]和Welch等^[9]也观测到了背景恒星被星系团极端放大的事件. 这类事件是星系团强引力透镜及其内部恒星等致密物质微引力透镜共同作用的结果. 通常来讲星系团内恒星的平均密度较低, 微引力透镜效应并不明显, 但是当像处于高放大率区域, 微引力透镜效应会显著提升^[10]. 对临界曲线附

2022-03-17收到原稿, 2022-04-26收到修改稿

*中国载人航天工程巡天空间望远镜专项科学研究经费(CMS-CSST-2021-A12)资助

†luoyu@pmo.ac.cn

近微引力透镜效应的研究,有助于我们深入地理解临界曲线附近像被极端放大的物理机制,从而预测焦散线穿越事件的发生和消失,进而更好地限制恒星及致密暗物质天体所占质量比重^[3, 11-13].

恒星级微引力透镜产生的多重像角间距通常在微角秒量级,观测上难以分辨出单个的微透镜像^[14-15],只能看到总流量的改变^[16].在很多研究中,计算源平面上的放大率分布图是模拟微引力透镜光变曲线的核心.光线追踪(inverse ray-shooting, IRS)是获得放大率分布图最直接的方法,主要是通过计算光线经过透镜平面时的偏折角,将大量光线从像平面映射到源平面^[17].

然而传统的光线追踪算法,在临界曲线附近计算源平面上的放大率分布图时存在两个困难:(1)临界曲线上的放大率为无穷大;(2)微透镜模拟的计算量巨大.一方面,临界曲线上无穷大的放大率会导致算法失效,因此临界曲线附近的透镜方程需要作出相应的修改;另一方面,模拟所需的像平面非常大,这意味着需要发射大量的光线,传统CPU (central processing unit)算法通常需要数月或数年的时间^[18].在IRS的基础上,也有研究提出更高效的计算方法—等级树算法^[19]、IPM (inverse polygon mapping)^[20-21]和GPU (graphics processing units)并行的光线追踪算法^[18, 22].光线追踪内核算法简洁,主要是多个逻辑无关偏转的累加操作,所以非常适合利用GPU开展并行计算,从而提高源平面放大率分布图的计算速度.基于Kelly等人观测到的背景恒星极端放大事件^[4-6],Venumadhav等人在2017年用解析方式和数值模拟研究了临界曲线附近微引力透镜效应的特性,并说明了焦散线穿越事件对星系团内的微透镜质量密度高度敏感,是暗物质成分的理想探针^[11].

由于计算效率的限制,Venumadhav等^[11]计算了低密度恒星的微透镜效应,并与解析结果对比,最后外推至高密度场.在本工作中,我们发展了一个能实现海量计算的GPU并行光线追踪方法.由于计算速度提升,我们模拟了临界曲线附近较高密度恒星场的微引力透镜效应,并研究了其统计特性.本文结构如下:第2节介绍临界曲线附近的透镜方程;第3节分别从参数设置和光线追踪两方面来介

绍临界曲线附近微透镜模拟的方法;第4节介绍临界曲线附近微透镜效应的统计特性;第5节是对本工作的总结.

2 临界曲线附近的透镜方程

我们首先考虑几何光学和薄透镜近似下的光滑透镜模型,像平面上的任意角位置 θ 通过透镜方程: $\beta = \theta - \alpha(\theta)$,映射到源平面上的位置 β .其中 α 是偏转角.这一映射的雅可比矩阵为:

$$\mathbf{A}(\theta) \equiv \frac{\partial \beta(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa(\theta) - \gamma(\theta) & 0 \\ 0 & 1 - \kappa(\theta) + \gamma(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

(1)式是微引力透镜研究中对强透镜环境的一般性描述.其中, $\kappa(\theta)$ 为会聚度,表示像位置处以 Σ_{crit} 约化后无量纲的质量面密度.这里,

$$\Sigma_{\text{crit}} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_l D_{ls}}$$

为临界质量面密度, c 是光速, G 是万有引力常数, D_{ls} 、 D_l 和 D_s 分别是透镜到源、透镜到观测者和源到观测者之间的角直径距离. $\gamma(\theta)$ 表示剪切,描述像所受到的扭曲作用.放大率为雅可比矩阵行列式的倒数,即 $\mu = 1/\det \mathbf{A}$.

对于像平面上的每个点,在源平面上都有且仅有一个点与之对应,但是对于一个给定位置的源,可以有多个像与之对应.当源穿过焦散线时,像就会在像平面临界曲线上成对地出现或消失.通常情况下,(1)式中的映射是局部可逆的,即 $d\theta = \mathbf{A}^{-1}(\theta)d\beta$,而在临界曲线上 $\det \mathbf{A} = 0$,因此我们在临界曲线附近将会聚和剪切展开到一阶:

$$\kappa(\theta) = \kappa_0 + \theta \cdot (\nabla \kappa)_0, \quad (2)$$

$$\gamma(\theta) = \gamma_0 + \theta \cdot (\nabla \gamma)_0, \quad (3)$$

这里,下标0表示临界曲线上的量.本工作仅考虑折叠类型的焦散线,即在临界曲线上有 $1 - \kappa_0 - \gamma_0 = 0$,所以临界曲线附近的雅可比矩阵为:

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \theta \cdot d & 0 \\ 0 & 2(1 - \kappa_0) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{d} \equiv -(\nabla\kappa)_0 - (\nabla\gamma)_0$. 在局部区域, 临界曲线近似为一条直线, \mathbf{d} 的方向垂直于临界曲线, 即 $\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0$. 因此, 临界曲线附近的透镜方程由(4)式积分得到:

$$\begin{cases} \beta_x = \frac{1}{2}d_x\theta_x^2 + d_y\theta_x\theta_y, \\ \beta_y = 2(1 - k_0)\theta_y, \end{cases} \quad (5)$$

这里, 下标 x 和 y 表示源平面或像平面上的两个维度.

现在我们考虑光滑透镜中有一部分物质以致密形式存在的情况. 我们向光滑透镜模型添加一部分微透镜天体, 再相应地扣除一个与微透镜质量密度 κ_* 相同的“质量片”, 从而保证总物质质量密度不变. 这样, 透镜方程(5)式改写为:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d_x\theta_x + d_y\theta_y & 0 \\ 0 & 2(1 - \kappa_0) \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta} - \sum_{k=1}^{N_*} m_k \frac{(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_k)}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_k|^2} - \boldsymbol{\alpha}_{-\kappa_*}, \quad (6)$$

其中, m_k 和 $\boldsymbol{\theta}_k$ 分别是第 k 个微透镜的质量和位置, N_* 是总微透镜数目. (6) 式中等式右边的第1项表示原初光滑模型下的像平面与源平面的理想映射关系, κ_0 和 \mathbf{d} 可以从强透镜模型得到; 第2项表示微透镜对光线的偏折; 第3项表示表面质量密度为 $-\kappa_*$ 的“负质量片”对光线的偏折. 为简单起见, 这里我们假定微透镜的质量分布形式为均一分布, 每个微透镜的质量均为 M , 并且所有角度均以 θ_E 约化. 其中 θ_E 为微透镜的爱因斯坦半径:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_l D_s}}. \quad (7)$$

因此, (6) 式中有 $m_k = 1$.

在光线追踪中, 计算量正比于微透镜数与总光线数的乘积, 在第4节我们可以看到, 这个数字是巨大的. 由于每条光线的微透镜贡献的偏转角是所有微透镜各自偏转角的线性叠加, 并且每条光线都经历相同的操作, 光线之间不会相互影响. 这就非常适合用GPU并行化来提高计算速度. 鉴于此, 在

我们随后的临界曲线附近微引力透镜模拟中将采用GPU并行的方法.

3 方法介绍

在本节中, 我们将详细介绍临界曲线附近微引力透镜模拟的GPU算法. 光线由像平面映射到源平面是该模拟的核心部分, 主要思路是大量GPU核同时计算光线的偏转, 除此之外, 计算偏折角时区分对待不同距离的微透镜: 直接计算距离光线较近的微透镜贡献的偏转角, 插值计算距离光线较远的微透镜贡献的偏转角. 下面将分别从参数设置和光线追踪两方面来说明.

3.1 参数设置

在角坐标系下, 我们考虑大小为 $L_{sx} \times L_{sy}$ 的源平面(后称 s). 透镜星系中微透镜的引力散射作用会使像平面发射的光线不完全落入 s 区域内. 这使得边界附近计算的放大率不准确^[19]. 因此, 我们在目标源平面 s 外增加一个大小足够的保护区^[23], 目标源平面加上保护区的区域后称 s' , 用于之后计算像平面的大小, 从而保证放大率的计算精度. 这里我们选取的保护区的宽度为 $10\sqrt{\kappa_*}$, 以确保 s 区域放大率计算精度为 $\sim 98\%$ ^[23].

在以上设定下, 加了保护区的源平面 s' 大小为 $L'_{sx} \times L'_{sy}$:

$$L'_{sx} = L_{sx} + 20\sqrt{\kappa_*}, \quad L'_{sy} = L_{sy} + 20\sqrt{\kappa_*}.$$

假定目标源平面 s 的坐标范围为: (x_{\min}, x_{\max}) 和 (y_{\min}, y_{\max}) , 那么 s' 的范围为: $(-10\sqrt{\kappa_*} + x_{\min}, x_{\max} + 10\sqrt{\kappa_*})$ 和 $(-10\sqrt{\kappa_*} + y_{\min}, y_{\max} + 10\sqrt{\kappa_*})$. 这样, 根据透镜方程, 我们可以用 s' 的范围确定像平面的大小. 假定像平面是大小为 $L_{ix} \times L_{iy}$ 的矩形, 微透镜分布区域与之相同, 因此我们可以计算微透镜的数目为:

$$\begin{aligned} N_* &= \frac{L_{ix}L_{iy}\theta_E^2 D_l^2 \kappa_* \Sigma_{\text{crit}}}{M} \\ &= \frac{L_{ix}L_{iy}\kappa_*}{\pi}. \end{aligned}$$

3.2 光线追踪

假定源平面放大率分布图需要的像素数目为

N_{pix} , 精度为 N_{av} (N_{av} 为没有微透镜时源平面放大率分布图平均每个网格内的光线数目). 像平面上需要发射的光线数目是:

$$N_{\text{rays}} = N_{\text{av}} \times N_{\text{pix}}, \quad (8)$$

每条光线由微透镜产生的偏折角可通过

$$\alpha_{\star} = \sum_{k=1}^{N_{\star}} m_k \frac{(\theta - \theta_k)}{|\theta - \theta_k|^2}$$

直接计算得到, 即使通过GPU来并行计算, 其计算量也是非常巨大的. 因此, 我们参考了Wambsganss^[19]在1990年的等级树算法来提高计算效率, 根据微透镜与光线距离的远近将微透镜分为近微透镜和远微透镜, 则光线由于微透镜产生的偏折角为 $\alpha_{\star} = \alpha_{\text{near}} + \alpha_{\text{far}}$. 因此, 临界曲线附近的透镜方程需要把(6)式修改为:

$$\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d_x\theta_x + d_y\theta_y & 0 \\ 0 & 2(1 - \kappa_0) \end{pmatrix} \theta - \alpha_{\text{near}} - \alpha_{\text{far}} - \alpha_{-\kappa_{\star}}, \quad (9)$$

对于近微透镜的偏折角, 直接通过

$$\alpha_{\text{near}} = \sum_{k=1}^{N_{\text{near}}} m_k \frac{(\theta - \theta_k)}{|\theta - \theta_k|^2}$$

计算获得. 这里 N_{near} 表示对于某一光线的近微透镜数目. 由于远微透镜对光线偏折的影响较近微透镜而言非常小, 且距离越远其影响就越小, 因此所有远微透镜对光线的偏折可用插值近似计算. 这样既保证了偏折角计算的精度, 也提高了计算速度.

为实现上述方法, 我们在像平面上设置了三级网格(如图1所示level1、level2和level3网格均为正方形). 接下来是对三级网格的详细描述.

3.2.1 level1: 微透镜场设置

我们在透镜平面创建 $N_{1x} \times N_{1y}$ 个level1网格用于区分远近微透镜. level1网格的边长为:

$$L_{1x} = \text{Min} \left(L_0, \frac{L_{ix}}{10} \right), \quad (10)$$

其中, $L_0 = \sqrt{\frac{L_{ix}L_{iy}}{N_{\star}}}$ 表示每个微透镜所占像平面面积的平均边长. 当微透镜数目较多时, $L_{1x} = L_0$ 可

保证level1网格数目与微透镜数目相当; 而当微透镜数目很少时, 考虑到后面计算中需要通过光线位置所对应的level1网格, 判断微透镜对于光线而言是近微透镜还是远微透镜, $L_{1x} = L_{ix}/10$ 可使得level1网格数目不少于 10×10 , 仍能帮助我们很好地区分近微透镜和远微透镜.

3.2.2 level2: 插值场设置

我们在透镜平面创建 $N_{2x} \times N_{2y}$ 个level2网格用于记录远微透镜的偏折角信息. 我们将level2网格边长 L_{2x} 和 L_{2y} 分别设置为 $L_{2x} = L_{1x}/20$ 和 $L_{2y} = L_{1y}/20$. 对于某一条光线, 可计算其所有远微透镜对于光线所处level2网格的4个顶点对应的8个4阶泰勒系数^[19], 从而为远微透镜贡献的偏折角 α_{far} 计算作准备.

3.2.3 level3: 光线映射

我们在透镜平面创建 $N_{3x} \times N_{3y}$ 个level3像素, level3像素的中心位置对应着光线的位置, 其中level3像素的边长为:

$$L_{3x} = \sqrt{\frac{L_{ix}L_{iy}}{N_{\text{rays}}}}. \quad (11)$$

做完基本参数设置、level1网格微透镜分装以及level2网格插值系数准备后, 我们将光线追踪任务用GPU并行化. 每条光线在一个GPU核心上操作, 首先判断光线所处的level1网格位置, 计算近微透镜贡献的偏转角 α_{near} ; 其次判断其所处的level2网格, 由8个插值系数计算出远微透镜贡献的偏转角 α_{far} ; 然后计算出负质量片贡献的偏转角 $\alpha_{-\kappa_{\star}}$; 最后通过(9)式计算出该光线对应的源平面位置, 相应的源平面像素进行光线计数. 经过这一系列流程后, 我们把在GPU上得到的源平面光线数密度分布传递给CPU, 最终由(12)式得到源平面的放大率分布:

$$\mu_{ij} = N_{ij} \frac{S_1}{S_S}, \quad (12)$$

其中, i 和 j 分别表示源平面放大率分布图中像素的水平标号和竖直标号, μ_{ij} 和 N_{ij} 分别是源平面上第 (i, j) 个像素的放大率和光线数, S_1 和 S_S 分别是像平面level3的像素面积和源平面的像素面积.

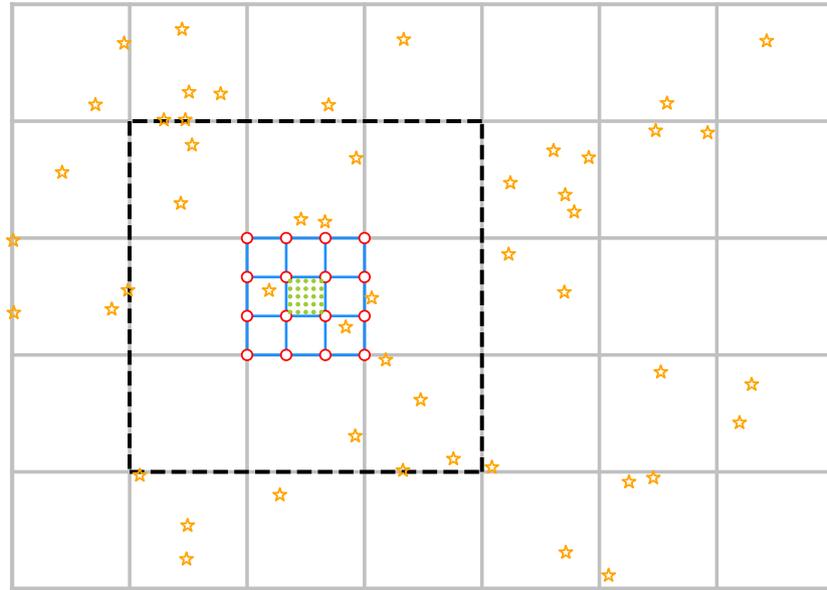


图 1 像平面三级网格示意图. 灰色网格表示level1网格, 蓝色网格表示某一level1网格内的level2网格, 绿色圆点某一level2网格内的光线(即某一level2网格内的level3像素的中心位置), 黄色星号表示微透镜. 对于图中的绿色圆点而言, 黑色虚线框以内的星号表示近微透镜, 以外的星号表示远微透镜.

Fig. 1 This figure is the three-level of grids sketch of a image plane. The gray grids represent the level1 grids, the blue grids represent the level2 grids within a level1 grid, the green dots represent the rays within a level2 grid (i.e. the center position of level3 pixels within a level2 grid), and the yellow asterisks represent the microlenses. For the green dots in the figure, the asterisks within the black dotted box represent the near microlenses and the asterisks outside represent the far microlenses.

经过测试, 由插值近似引入的偏折角计算误差约在 $10^{-7}\theta_E$ 量级, 最终得到的放大率分布图对应的光线数目涨落低于泊松噪声^[24]. 关于我们算法的速度, 目前还没有公开的程序可以用来直接比较. 由于我们与Zheng等^[24]在2022年提出的算法内核相同, 我们可以依据Zheng等^[24]的结果, 估计我们的算法比GPU并行的直接光线追踪算法快100倍以上.

4 临界曲线附近微透镜效应的统计特性

Venumadhav等人在2017年计算了低密度微透镜场($\kappa_* = 6.5 \times 10^{-5}$ 和 $\kappa_* = 3.25 \times 10^{-4}$)的微透镜效应, 并将结果外推到真实微透镜质量密度的情况^[11]. 在本节中, 由于高精度GPU算法的提升, 我们将设置比他们的研究中更高的微透镜质量密

度($\kappa_* = 0.001$), 来研究临界曲线附近微引力透镜效应的统计特性.

4.1 源平面放大率分布图和光变曲线

我们在 $N_{av} = 1000$ 的高精度和 $N_{pix} = 363635 \times 73877$ 的高分辨率下, 利用如上光线追踪算法计算了源平面上焦散线附近 $200 \times 40\theta_E^2$ 范围内的放大率分布图. 表1列出了模拟中的参数设置, 其中 κ_0 、 κ_* 和 d 由Kawamata等人在2016年对星系团MACSJ 1149.5+2223构建强透镜模型时得到^[25]. $\kappa_c = (\theta_E|d|)^{2/3}$ 表示恒星表面质量密度的一个阈值, 低于此阈值时, 原先光滑模型下的焦散线和临界曲线能够基本保持, 即微透镜效应可以忽略, 反之则需要谨慎考虑微透镜效应. 我们的计算中 $\kappa_* \gg \kappa_c$, 微透镜的微临界曲线与星系团临界曲线高度耦合, 形成复杂的临界曲线带^[11].

表 1 模拟中的参数设置

Table 1 Parameter setting in simulation

Parameter	Value
κ_0	0.83
$\mathbf{d}/(')^{-1}$	(3.62, -3.41)
$\theta_E/''$	10^{-6}
κ_c^1	1.9×10^{-5}
κ_*	0.001
N_*	13745
N_{av}	1000

¹ κ_c is the threshold of mass density of star surface, when $\kappa_* \gg \kappa_c$, the microcritical curves of the microlens are highly coupled with the critical curve of the galaxy cluster, forming the band of corrugated microcritical curves^[11].

设置完临界曲线附近微透镜模拟的参数后, 我们从像平面发射 10^{13} 量级的光线, 通过3.2节所述的光线追踪方法将光线从像平面映射到源平面, 最终得到源平面的放大率分布图. 为了方便展示, 图2为部分放大率分布图, 两个维度的范围分别为 $\beta_y \in (0, 5)\theta_E$ 和 $\beta_x \in (-0.632456, 1)\theta_E$. 在光滑模型下, 焦

散线对应源平面放大率分布图中 $\beta_x = 0$ 的水平直线, 其下方区域的放大率按照 $1/\sqrt{\beta_x}$ 递减. 加上微透镜效应之后, 从图2中可以看到, 在焦散线附近有微透镜带来的明显微焦散线结构, 微焦散线之间相互重叠. 焦散线受到微焦散线的强烈扰动, 在其附近形成一条微焦散带. Venumadhav等人在2017年解析估算出微焦散带的宽度^[11]为:

$$s_w \simeq \frac{2\theta_E}{|\sin a|} \kappa_c^{1/2} \left(\frac{\kappa_*}{\kappa_c} \right)^2, \quad (13)$$

其中, κ_c 的含义如表1所示. a 表示临界曲线与坐标轴的夹角, 有 $\tan a = d_x/d_y$.

光变曲线是指在星系团强引力透镜及星系团内致密物质的微引力透镜作用下, 背景源的放大率随其在源平面上位置改变而发生的变化. 图2中的棕色实线标记了背景源沿源平面某一系列(以5000列为例, $i = 5000$)竖直向下运动的部分轨迹. 图3是光变曲线与峰值认定示例图, 其中(a)图展示了背景源沿该轨迹运动时每个源平面像素内放大率 μ_i (棕色实线)与平均放大率 $\langle \mu \rangle$ (黑色虚线)的变化, 可以看到放大率在平均放大率附近上下波动, 而且当源接近焦散线时, 平均放大率和峰值放大率都有增大的趋势.

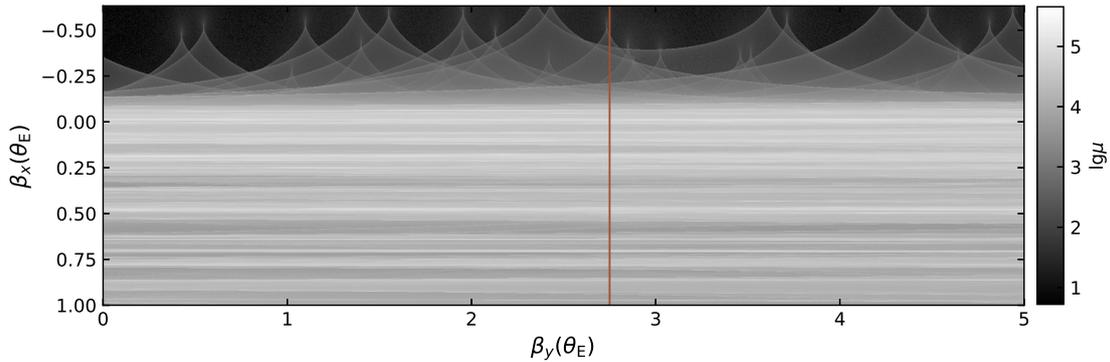


图 2 源平面的放大率分布图. 图中展示的是 $\beta_y \in (0, 5)\theta_E$ 和 $\beta_x \in (-0.632456, 1)\theta_E$ 的源平面放大率分布图. 这一区域被划分为 9091×2969 个像素, 透镜场的参数设置如表1所示. 其中棕色实线标记背景源沿源平面第5000列竖直向下运动的部分轨迹. 放大率分布图以对数形式展示, 即 $\lg \mu$, 不同的灰度表示不同的放大率.

Fig. 2 This figure is magnification map of the source plane. The figure shows the region on the source plane in the range of $\beta_y \in (0, 5)\theta_E$ and $\beta_x \in (-0.632456, 1)\theta_E$. This region is divided into 9091×2969 pixels. Parameter settings of the lens field are shown in Table 1. The brown solid line marks part of the trajectory of the background source moving vertically downward along column 5000 of the source plane. The magnification map is shown in logarithmic form, i.e. $\lg \mu$, with different gray levels representing different magnifications.

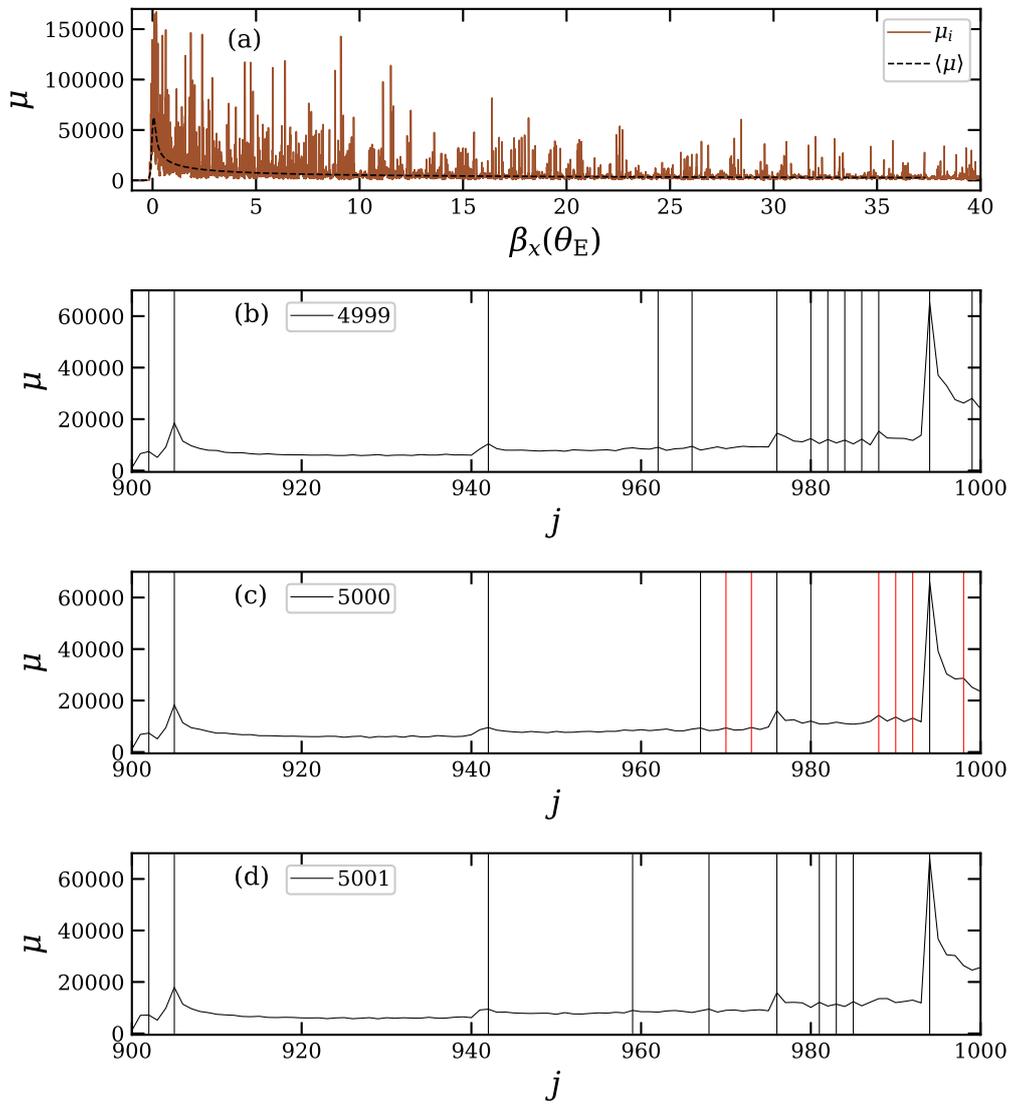


图 3 光变曲线与峰值认定示例图. 图(a)中的棕色实线表示背景源沿放大率分布图第5000列竖直向下移动时每个源平面像素内放大率的变化, 其中 β_x 是指源平面竖直方向上的位置, 黑色虚线表示平均放大率沿源平面竖直方向上的变化. 下面3个图中的黑色实线分别表示背景源沿着源平面第4999、5000和5001列竖直移动的放大率变化. j 表示目标源平面像素的竖直标号. 黑色和红色竖线都表示置信度高于 $5\sigma_{ij}$ 的候选峰, 而红色竖线标记第5000列中交叉检验后被排除的候选峰.

Fig. 3 Light curves and example diagram of peak identification. The solid brown line in panel (a) represents the change of the magnification in each source plane pixel as the background source moves vertically downward along column 5000 of the magnification map, where β_x is the vertical position of the source plane, and the dashed black line represents the change of the average magnification along the vertical direction of the source plane. The black solid lines in the lower three panels represent the changes of magnification that the background source moving vertically downward along column 4999, 5000, and 5001 of the source plane. j represents the vertical label of the source plane pixel. Both the black and red vertical lines indicate candidate peaks with confidence higher than $5\sigma_{ij}$, and red vertical lines mark candidate peaks excluded after cross validation in column 5000.

4.2 峰值统计特性

在给定其他参数的情况下, 微焦散线的数密度反映了微透镜的数密度, 而光变曲线上的峰值放大率反映的是微透镜的质量, 因此这两个量对于分辨微透镜天体和限制微透镜天体的质量及质量占比都是最直接的, 也是我们所关心的. Venumadhav等人在2017年解析估算出在源平面上距离星系团强引力透镜焦散线1个

$$s_f \left(= \left[\ln(3.05N_*^{1/2}) \right]^{1/2} \theta_E \kappa_*^{1/2} \equiv C_* \theta_E \kappa_*^{1/2} \right)$$

内的微焦散线数目和峰值放大率^[11]分别近似为:

$$N_{cf} \simeq \left(\frac{2C_*}{|\sin a|} \right)^{1/2} \left(\frac{\kappa_*}{\kappa_c} \right)^{3/4}, \quad (14)$$

$$\mu_{\text{peak}} \simeq \frac{1}{|1 - \kappa_0|} \left(\frac{D_s}{R|d|} \right)^{1/2} \left(\frac{\kappa_c}{\kappa_*} \right)^{3/4} \times \begin{cases} 1, & |\beta| \leq s_w, \\ (s_w/|\beta|)^{3/8}, & |\beta| > s_w. \end{cases} \quad (15)$$

其中, $C_* = [\ln(3.05N_*^{1/2})]^{1/2}$, R 为背景源半径. 他们认为峰值放大率在微焦散带内基本保持恒定并与 $(\kappa_*/\kappa_c)^{3/4}$ 成正比, 在微焦散带外随着与焦散线的距离增大, 峰值放大率按照 $(s_w/|\beta|)^{3/8}$ 快速下降.

我们通过如第3节所述的光线追踪方法, 得到大量的源平面放大率分布图以及光变曲线, 就可以将他们的微焦散线(峰值)数密度和峰值放大率结果与我们的数值统计进行比较. 图3 (b)、(c)和(d)图中的黑色实线分别是源平面第5000列及其相邻两列垂直标号900 ~ 1000范围内的光变曲线, 可以看到其光变曲线底部有明显的“抖动”, 这些“抖动”是由光线数涨落引起的泊松噪声和暗弱微焦散线所致. 因此, 在统计峰值数目以及峰值放大率之前, 重要的一步是如何认定光变曲线上的峰值是由泊松噪声所致, 还是由微焦散线穿越所致. 为了方便说明, 后面将分别称其为“假峰”和“真峰”.

以源平面第*i*列放大率变化的峰值认定为例如, 对于第(*i*, *j*)个像素的光线数 N_{ij} , 若满足 $N_{ij} > \text{Max}[N_{i(j-1)}, N_{i(j+1)}]$ 及相对峰高 $h_{ij} > 5\sigma_{ij}$, 则第(*i*, *j*)个像素标记为“候选峰”的位置. 其中,

$$h_{ij} = N_{ij} - \langle N \rangle,$$

$$\langle N \rangle = (N_{i(j-1)} + N_{ij} + N_{i(j+1)}) / 3,$$

$$\sigma_{ij} = \sqrt{\langle N \rangle}.$$

通过这两个限制, 我们筛选出了置信度大于 $5\sigma_{ij}$ 的候选峰. 我们还可以进一步借助左右相邻两条放大率曲线来排除假峰: 焦散线是一条连续的线, 所以在一个峰的左右两边相邻的3个像素内必然也分别存在一个峰. 即当左边(*i* - 1, *j* - 1)、(*i* - 1, *j*)、(*i* - 1, *j* + 1)的3个像素中有一个被标记为候选峰, 并且右边(*i* + 1, *j* - 1)、(*i* + 1, *j*)、(*i* + 1, *j* + 1)的3个像素中也有一个被标记为候选峰, 那么第(*i*, *j*)上的候选峰才会被我们最终认定为真峰.

图3 (b)、(c)和(d)图展示了源平面第5000列峰值认定过程. 图中黑色和红色竖线标记的是我们第1步找出第4999、5000和5001列中的候选峰样例, 经过第2步交叉检验后, 第5000列上红色标记的候选峰被排除. 图3 (c)中黑色标记的是我们最终认定的峰值.

我们生成80个如第4.1节所述的源平面放大率图, 从中抽取800条光变曲线用于峰值统计特性的探究. 在型号为NVIDIA Tesla V100S PCIe 32 GB的GPU上, 平均每张源平面放大率图计算的时间在7000 s左右. 图4展示了我们统计的约化后微焦散线数密度随源到焦散线距离的变化. 其中, 微焦散线数密度以(14)式中的因子来约化, 源到焦散线的距离以 s_f 来约化. 图4与Venumadhav等人的图7^[11]相比, 可以看到在远距离处的约化微焦散线数密度都约为 $0.3 s_f^{-1}$, 以及微焦散线数密度在最高点处都有一个平台. 另外, 还表现出两点差异: (1) 最高点处我们的约化微焦散线数密度($\sim 0.53 s_f^{-1}$)略低于他们的约化峰值密度($\sim 0.8 s_f^{-1}$). Venumadhav等^[11]用牛顿迭代的方式计算放大率, 理论上能找出所有的微焦散线. 而在我们的光线追踪算法中, 由于一些细微的焦散线处在放大率较高的背景中, 导致我们的峰值认定方法无法辨认这些暗弱的微焦散线, 从而使得我们结果偏低. 但从另外一个角度讲, 我们的结果应该更加符合观测筛选过程. (2) 在最高点处微焦散线数密度平台的宽度不同, 我们的平台宽 $\sim 2 s_f$, 只有他们的一半宽. 由于算法的提升, 我们可以进行充分的采样, 因此统计结果具有

较低的噪声水平, 从而显示出统计上更窄的平台结构, 这是可以理解的.

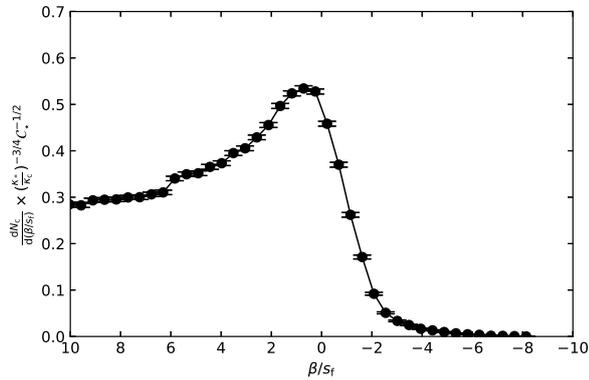


图 4 微焦散线数密度与源到焦散线距离的关系. 黑色实线是我们 800 条光变曲线统计的结果, 黑色误差棒是统计误差. 为了方便展示, 纵坐标是以(14)式中的因子约化后的微焦散线数密度, 横坐标是以 s_f 约化后的源到焦散线的距离.

Fig. 4 The relationship between microcaustic density and the distance from source to macrocaustic. The black solid line is the result of our statistics of 800 light curves, and the black error bar represents the statistical error. For the convenience of display, the ordinate is the microcaustic density scaled by the factor in the Eq. (14), and the abscissa is the distance from source to macrocaustic scaled by s_f .

接下来, 我们研究了光变曲线上的峰值放大率. 图5中的黑点展示了在我们模拟的光变曲线中, 约化后的峰值平均放大率 $\langle \tilde{\mu}_{\text{peak}} \rangle$ 随着源到焦散线距离的变化, 黑色虚线表示(15)式中3/8指数的幂律行为. 为了方便展示, 源到焦散线的距离以微焦散带宽度 s_w 来约化, 放大率以(15)式中的因子来约化. 与Venumadhav等人的图8^[11]相比, 由于采样率的提升, 我们的结果更加稳定, 表现出一点相同和一点差异: (1)在1个 s_w 距离上, 约化的平均峰值高度都约为0.1; (2)但在1个 s_w 以内, Venumadhav等^[11]的数值结果基本保持为常数, 这个平台行为与他们的理论估算相吻合, 但是平台高度仅为其理论估计值的1/4. 而随着源接近焦散线, 我们的结果仍然按照 $(s_w/|\beta|)^{3/8}$ 上升, 直到 $< 0.01 s_w$ 才趋于常数1.

结合图3 (a)来考察这一差异, 本文中 $s_w = 25.5\theta_E$, 可以明显看到峰值放大率高度在1个 s_w 以

内不是常数, 随着 $\beta_x \rightarrow 0$, 峰值放大率有明显的增亮趋势. 这佐证了我们统计结果的正确性.

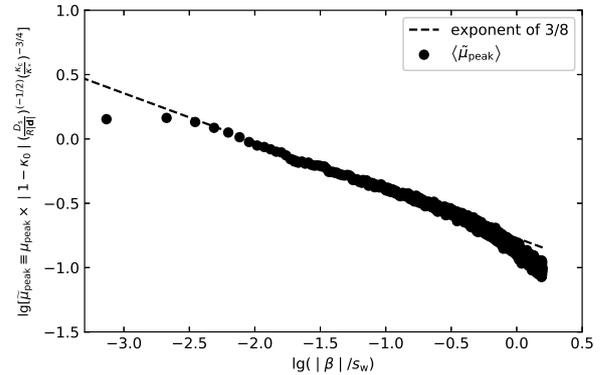


图 5 峰值平均放大率与源到焦散线距离的关系. 黑点表示约化后的峰值平均放大率, 黑色虚线表示(15)式描述的峰值放大率随距离以幂指数3/8的变化趋势. 为了方便展示, 纵坐标是以(15)式中的因子约化后的峰值放大率, 横坐标是以 s_w 约化后的源到焦散线的距离. 横纵坐标均以10为底取对数.

Fig. 5 The relationship between the mean value of peak magnification and distance from source to macrocaustic. The black dots represent the scaled average peak magnification, and the black dashed line represents the trend of the peak magnification with distance as described by Eq. (15) with exponent of 3/8. For the convenience of display, the ordinate is the mean value of peak magnification scaled by the factor in the Eq. (15), and the abscissa is the distance from source to macrocaustic scaled by s_w . Both abscissa and ordinate take logarithm based on 10.

5 总结

本工作中, 我们发展了一个高效的GPU并行光线追踪算法来研究临界曲线附近的微引力透镜效应. 在型号为NVIDIA Tesla V100S PCIe 32 GB的GPU上, 对于需要处理上万个微透镜天体、发射 10^{13} 量级光线的高精度和高分辨率模拟, 耗时在7000s左右. 我们选取了比Venumadhav等人在2017年的研究^[11]中更高的微透镜表面质量密度 ($\kappa_* = 0.001$), 利用该方法产生了800条光变曲线, 研究临界曲线附近微透镜效应的统计特性.

临界曲线附近的微引力透镜效应模拟存在临界曲线上放大率无穷和计算量巨大的困难. 我们的模拟方法使用GPU并行的同时, 还设置三级网格来提高光线追踪的计算效率. level1网格负责设置

微透镜场, 分装微透镜以判断其对于某条光线是近微透镜还是远微透镜; level2网格负责设置插值场, 计算对于某条光线的 α_{far} 所需的8个4阶泰勒系数; level3像素负责映射光线. 对于每条光线, 直接计算近微透镜贡献的偏转角 α_{near} 和负质量片贡献的偏转角 $\alpha_{-\kappa_+}$, 插值计算远距离微透镜贡献的偏转角 α_{far} , 按照透镜方程将像平面光线映射到源平面, 并在相应的源平面像素内对光线计数, 最终得到源平面上的放大率分布图.

我们发现在焦散线附近, 微引力透镜效应产生了明显的微焦散线结构. 微焦散线之间相互重叠, 给焦散线带来强烈扰动, 在其附近形成一条微焦散带. 我们的统计结果与Venumadhav等人在2017年的结果^[11]表现出较好的一致性, 但有略微差异: (1)远距离处的约化焦散线数密度为 $\sim 0.3 s_f^{-1}$, 焦散线数密度在最高点有一个平台, 其宽度为 $\sim 2 s_f$ 和约化高度为 $\sim 0.53 s_f^{-1}$. (2)随着源接近焦散线, 峰值放大率以 $(s_w/|\beta|)^{3/8}$ 上升, 直到 $\sim 0.01 s_w$ 以内才趋于稳定. 考虑到我们的统计结果依赖于峰值认定方法, 该方法保留了信噪比较高的峰值, 更加符合实际观测筛选流程. 我们认为这是解释上述差异的可能原因之一. 另外, 由于计算效率的大大提升, 我们进行了充分的采样, 统计结果的噪声水平较低, 具有更高的可信度.

致谢 感谢李国亮老师对本工作的指导, 感谢国家基础科学数据中心模拟数据库和中科院先进计算产业联盟南京先进计算中心的支持.

参 考 文 献

- [1] Blandford R, Narayan R. *ApJ*, 1986, 310: 568
- [2] Miralda-Escude J. *ApJ*, 1991, 380: 1
- [3] Diego J M, Kaiser N, Broadhurst T, et al. *ApJ*, 2018, 857: 25
- [4] Kelly P L, Diego J M, Rodney S, et al. *NatAs*, 2018, 2: 334
- [5] Kelly P L, Rodney S, Diego J M, et al. *ATel*, 2016, 9097: 1
- [6] Kelly P L, Broadhurst T J, Cenko S B, et al. *HST Proposal*, 2017, 14922
- [7] Rodney S A, Balestra I, Bradac M, et al. *NatAs*, 2018, 2: 324
- [8] Chen W L, Kelly P L, Diego J M, et al. *ApJ*, 2019, 881: 8
- [9] Welch B, Coe D, Diego J M, et al. *Nature*, 2022, 603: 815
- [10] Dai L. *MNRAS*, 2021, 501: 5538
- [11] Venumadhav T, Dai L, Miralda-Escudé J. *ApJ*, 2017, 850: 49
- [12] Dai L, Venumadhav T, Kaurov A A, et al. *ApJ*, 2018, 867: 24
- [13] Oguri M, Diego J M, Kaiser N, et al. *PhRvD*, 2018, 97: 023518
- [14] Paczyński B. *ApJ*, 1986, 301: 503
- [15] Schneider P, Weiss A. *A&A*, 1987, 171: 49
- [16] Wambsganss J. *ASPC*, 2001, 239: 351
- [17] Kayser R, Refsdal S, Stabell R. *A&A*, 1986, 166: 36
- [18] Thompson A C, Fluke C J, Barnes D G, et al. *NewA*, 2010, 15: 16
- [19] Wambsganss J. *JCoAM*, 1990, 109: 353
- [20] Mediavilla E, Muñoz J A, Lopez P, et al. *ApJ*, 2006, 653: 942
- [21] Mediavilla E, Mediavilla T, Muñoz J A, et al. *ApJ*, 2011, 741: 42
- [22] Weisenbach L, Schechter P L, Pontula S. *ApJ*, 2021, 922: 70
- [23] Katz N, Balbus S, Paczynski B. *ApJ*, 1986, 306: 2
- [24] Zheng W W, Chen X C, Li G L, et al. *ApJ*, 2022, 931: 114
- [25] Kawamata R, Oguri M, Ishigaki M, et al. *ApJ*, 2016, 819: 114

Microlensing Simulation near the Critical Curve

YANG Xu-liu^{1,2} CHEN Xue-chun^{1,2} ZHENG Wen-wen^{1,2} LUO Yu^{1,3}

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023)

(2 School of Astronomy and Space Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

(3 National Basic Discipline Public Science Data Center, Beijing 100190)

ABSTRACT In the smooth mass distribution model, the critical curve is a line with magnification divergence on the image plane in the strong gravitational lens system. After considering the microlensing of a very small amount of discrete mass, the magnification map in the source plane has a complex structure, which provides an effective way to detect the dark matter. There are difficulties including the magnification divergence at critical curve and the huge amount of computation in microlensing simulation. To achieve the required simulation accuracy, using inverse ray-shooting directly will require huge computational resources. Therefore we developed a Graphics Processing Unit (GPU)-based parallel method to achieve the goal for massive computing. It takes about 7000 seconds to calculate ~ 13000 microlenses for 10^{13} orders of magnitude of rays on the GPU of NVIDIA Tesla V100S PCIe 32 GB. On the basis of GPU parallel, compared with the direct ray tracing algorithm, the interpolation approximation improves the computing speed by about two orders of magnitude. We use this method to generate 80 magnification maps, and select 800 light curves for a statistical analysis of microcaustic density and peak magnification.

Key words gravitational lensing: strong gravitational lensing, gravitational lensing: gravitational microlens, methods: numerical