

中性和不稳定层结大气的孤立行波精确解*

周江兴 丁一汇 刘益民

(中国气象科学研究院, 北京, 100081)

摘 要

通过研究二维准动量无辐散、无摩擦层结大气非线性方程组的行波解问题证明, 非线性行波解的本质属性是由参数 b 的符号性质决定的。当 $b > 0$ 时, 为周期解, 其周期与相应的线性周期解的周期相等; 当 $b \leq 0$ 时, 为孤立波解。给出了一般行波解的解析表达式。并细致地研究了中性和不稳定层结大气中的孤立行波的特征, 发现中性和不稳定层结大气中存在具有类似于飑线结构特征的孤立波。指出了中性和不稳定层结大气中的一般孤立行波物理量的分布特征。

关键词: 孤立波, 精确解, 层结大气。

1 引 言

关于层结大气中的惯性重力波的非线性问题, 刘式达、刘式适等人做了大量的工作^[1-3]。在文献[3]中, 解析地证明了层结大气中, 当基本气流存在强垂直切变时会产生间断现象。许秦(1983)用多重尺度法研究了层结大气中的内惯性重力孤立波与飑线的关系^[4]; 赵瑞星(1990)研究了非均匀密度分布大气中的惯性重力行波的非线性性质, 证明了当 $b > 0$ 时无基流垂直切变大气中的行波为周期性行波, 并对此作了近似求解^[5], 但未对 $b \leq 0$ 时的解作详细讨论。为了深入地讨论, 我们在文献[5]工作的基础上引入了一个关键性的非线性变换, 使其基本方程化为常数系数线性方程, 从而使得文献[5]所研究的非线性系统能够完全解析地求解。本文只研究无基流垂直切变下的解的解析性质; 关于存在基流垂直切变下的一般的解析问题将在另文中讨论。本文给出了无基流垂直切变的层结大气中的非线性行波的解析解。并证明这种解的本质属性是由参数 b 的符号性质决定的。当 $b > 0$ 时, 为周期解, 当 $b \leq 0$ 时, 为孤立波解, 且这种孤立波具有类似于飑线的一维结构特征^[6,7]。

虽然, 我们只给出了无基流垂直切变下关于非线性行波基本性质的解析结论, 但是其中确实反映了整个非线性系统的某些重要的非线性特征, 这对于了解中尺度系统的非线性动力学性质是有益的。

2 基本方程

* 初稿时间: 1994 年 5 月 11 日; 修改稿时间: 1994 年 12 月 7 日。
资助课题: 国家自然科学基金资助项目。

在 Boussinesq 近似下,层结大气的二维运动方程组为^[4,5]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} (u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}) + \alpha_0 w u - f_0 v = - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} (u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z}) + \alpha_0 w v + f_0 u = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} (u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z}) + \alpha_0 w^2 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} (u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z}) + \alpha_0 w \theta + N_0^2 w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

其中: u_0 为基本气流是常数, f_0 为 Coriolis 参数, N_0 为 Brunt-Väisälä 频率, $(u, v, w) = \rho_0(u', v', w')$, $\theta = g\rho_0\theta'/\theta_0$, $p = p'$, $\rho_0 = \rho_0(z)$, 以上带撇号的均为扰动量;

另外

$$\left\{ \begin{array}{l} N_0^2 = g \frac{d \ln \theta_0}{dz}, \quad \alpha_0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \\ \beta_0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\ln \theta_0) \end{array} \right. \quad (1a)$$

在本文中,我们取 $N_0, \alpha_0, \beta_0, f_0$ 均为常数。

可以证明在实际大气中

$$|(\alpha_0 - \beta_0)/\alpha_0| \sim 0.1 \ll 1 \quad (1b)$$

所以,在本文中我们取 $\alpha_0 = \beta_0$

设:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = U(\tau), \quad v = V(\tau), \quad w = W(\tau) \\ p = P(\tau), \quad \theta = \Theta(\tau) \\ \tau = kx + nz - \sigma t \end{array} \right. \quad (2)$$

其中 k, n 分别为 x, z 方向的波数, σ 为圆频率。将式(2)代入式(1)得

$$\left\{ \begin{array}{l} (ku_0 - \sigma)U + \frac{1}{\rho_0} (kU + nW)U + \alpha_0 WU - f_0 V + kP = 0 \\ (ku_0 - \sigma)V + \frac{1}{\rho_0} (kU + nW)V + \alpha_0 WV + f_0 U = 0 \\ (ku_0 - \sigma)W + \frac{1}{\rho_0} (kU + nW)W + \alpha_0 W^2 + nP - \Theta = 0 \\ (ku_0 - \sigma)\Theta + \frac{1}{\rho_0} (kU + nW)\Theta + \alpha_0 W\Theta + N_0^2 W = 0 \\ kU + nW = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

由方程组(3)中的第 5 个公式得

$$kU + nW = U_0 \quad (U_0 \text{ 为积分常数}) \quad (3a)$$

在本文中,我们只讨论 $U_0 = 0$ 的情况。故有

$$kU + nW = 0 \quad (\text{横波条件}) \quad (4)$$

于是式(3)可写为

$$\begin{cases} \nu \dot{U} + \alpha_0 WU - f_0 V + kP = 0 \\ \nu \dot{V} + \alpha_0 WV - f_0 U = 0 \\ \nu \dot{W} + \alpha_0 W^2 + n\dot{P} - \Theta = 0 \\ \nu \dot{\Theta} + \alpha_0 W\Theta + N_0^2 W = 0 \\ U = -nW/k \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$\nu = ku_0 - \sigma \quad (5a)$$

由式(5)得

$$\ddot{W} + 3aW\dot{W} + a^2W^3 + bW = 0 \quad (6)$$

其中:

$$\begin{cases} a = \alpha_0/\nu, & K^2 = k^2 + n^2 \\ b = (n^2 f_0^2 + K^2 N_0^2)/(\nu^2 K^2) \end{cases} \quad (6a)$$

设:

$$W = \dot{R}/(aR) \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)得

$$\ddot{R} + bR = 0 \quad (8)$$

由式(8)得

$$\ddot{R} + bR = C_0 \quad (C_0 \text{ 为积分常数}) \quad (8a)$$

由式(5)、(7)及(8a)推得

$$\begin{cases} V = V_0 + C_1/R \\ \Theta = \Theta_0 + C_2/R \\ W = \dot{R}/(aR) \\ U = -n\dot{R}/(kaR) \\ P = e_1\tau + e_2 \int (1/R) d\tau \end{cases} \quad (9)$$

其中: C_1, C_2 为积分常数, 且

$$\begin{cases} V_0 = nf_0/(k\alpha_0), & \Theta_0 = -N_0^2/\alpha_0 \\ e_1 = n(f_0^2 - N_0^2)/(\alpha_0 K^2), & e_2 = (f_0 k C_1 + n C_2)/K^2 \end{cases} \quad (9a)$$

$$\nu^2 K^2 C_0 + \alpha_0 f_0 n k C_1 - \alpha_0 k^2 C_2 = 0 \quad (9b)$$

通过以上分析,我们将非线性方程组(5)的求解问题化为常系数线性方程(8a)的求解问题,将式(8a)的解 R 代入式(9)中就得到了非线性方程组(5)的解,也是非线性方程组(1)的行波解。

3 非线性行波精确解

在这一节中,将给出非线性方程组(5)的通解,并讨论其性质。

方程 $R + bR = C_0$ 使得 W 有界的解可表示为以下的形式

$$\begin{cases} R = A(B + \sin(\lambda\tau)) & (b > 0, B^2 > 1) \\ R = A(B + \tau^2) & (b = 0, B > 0) \\ R = A(B + \cosh(\lambda\tau)) & (b < 0, B > -1) \end{cases} \quad (10)$$

其中 A, B 为待定常数。对 B 的约束条件是为了使 W 有界(因为, $W = \dot{R}/(aR)$, R 在分母上, 故 $R \neq 0$, 这就导致了式(10)右边对 B 的约束)。且

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{|b|} \\ AB = C_0/b & (b \neq 0) \\ A = C_0/2 & (b = 0) \end{cases} \quad (10a)$$

在以上解的表达式中, 没有考虑位相常数(即: 设 $\tau' = \tau + \tau_0$, τ_0 为任意常数, 以 τ' 代替 τ 代入式(10)中, 仍是原方程的解), 因为, 它并不改变解的基本性质, 只是坐标平移而已。

为了给出非线性方程组(5)的解(9)的具体解析表达式, 我们先来研究以下积分设:

$$I = \int (1/R) d\tau \quad (11)$$

(1) 当 $b > 0$ 时

$$I_1 = \frac{1}{A} \int \frac{d\tau}{B + \sin(\lambda\tau)} \quad (B^2 > 1)$$

设:

$$I_1 = J_0\tau + I_{10} + C_{11} \quad (11a_1)$$

其中 C_{11} 为积分常数, J_0 为 $1/R$ 的平均值,

$$J_0 = B/(\lambda A |B| \sqrt{B^2 - 1}) \quad (B^2 > 1) \quad (11a_2)$$

由文献[8]的结果, 并作简单的推导可证明

$$I_{10} = -J_0\tau = \frac{2}{\lambda A \sqrt{B^2 - 1}} \operatorname{arctg} \left[\frac{B \operatorname{tg}(\lambda\tau/2) + 1}{\sqrt{B^2 - 1}} \right] \quad (B^2 > 1) \quad (11a)$$

且 I_{10} 为有界的周期函数, 周期为 $2\pi/\lambda$ 。

由方程组(9)的第5个公式及(11a₁)得

$$P = (e_1 + e_2 J_0)\tau + e_2 I_{10} + P_0 \quad (P_0 \text{ 为常数}) \quad (11a_3)$$

为了使 P 有界, 下式必须满足

$$e_1 + e_2 J_0 = 0 \quad (11a_4)$$

故有:

$$P = P_0 + e_2 \left(-J_0\tau + \frac{2}{\lambda A \sqrt{B^2 - 1}} \operatorname{arctg} \left[\frac{B \operatorname{tg}(\lambda\tau/2) + 1}{\sqrt{B^2 - 1}} \right] \right) \quad (B^2 > 1) \quad (11a_5)$$

一般情况下上式中的 P 为有界的周期函数。

(2) 当 $b = 0$ 时

$$I_2 = \frac{1}{A} \int \frac{d\tau}{B + \tau^2} \quad (B > 0)$$

设: $I_2 = I_{20} + C_{22}$ (C_{22} 为常数), 由文献[8]得

$$I_{20} = \frac{1}{A \sqrt{B}} \arctg(\tau / \sqrt{B}) \quad (B > 0) \tag{11b}$$

(3) 当 $b < 0$ 时

$$I_3 = \frac{1}{A} \int \frac{d\tau}{B + \cosh(\lambda\tau)} \quad (B > -1)$$

设:

$$I_3 = I_{30} + C_{33} \quad (C_{33} \text{ 为常数})$$

由文献[8]得

$$I_{30} = \frac{1}{A\lambda} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\ln \frac{e^{\lambda\tau} + e_{11}}{e^{\lambda\tau} + e_{22}} - h_1) & (B > 1) \\ -2(\frac{1}{e^{\lambda\tau} + 1} - \frac{1}{2}) & (B = 1) \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} (2\arctg \frac{e^{\lambda\tau} + B}{\sqrt{-\Delta}} - h_3) & (B^2 < 1) \end{cases} \tag{11c}$$

其中:

$$\begin{cases} \Delta = B^2 - 1 \\ h_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{e_{11}}{e_{22}}, \quad h_3 = \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{B}{\sqrt{-\Delta}} \\ e_{11} = B - \sqrt{\Delta}, \quad e_{22} = B + \sqrt{\Delta} \end{cases} \tag{11c_1}$$

将式(10)、(11a)、(11b)及(11c)代入式(9)中,便得到非线性方程组(5)的解的解析表达式。

(1) 当 $b > 0$ 时

$$\begin{cases} U = -\mu_{11} \cos(X) / (B + \sin(X)) \\ V = V_0 + D_{11} / (B + \sin(X)) \\ W = \mu_{22} \cos(X) / (B + \sin(X)) \\ \Theta = \Theta_0 + D_{12} / (B + \sin(X)) \\ P = P_0 - \mu_{13} X + D_{13} \arctg(\frac{B \tg(X/2) + 1}{\sqrt{\Delta}}) \end{cases} \quad (B^2 > 1) \tag{12a}$$

(2) 当 $b = 0$ 时

$$\begin{cases} U = -\mu_{21} X / (1 + X^2) \\ V = V_0 + D_{21} / (1 + X^2) \\ W = \mu_{22} X / (1 + X^2) \\ \Theta = \Theta_0 + D_{22} / (1 + X^2) \\ P = P_0 + \mu_{23} X + D_{23} \arctg(X) \end{cases} \quad (B > 0) \tag{12b}$$

(3)当 $b < 0$ 时

$$\left\{ \begin{array}{l} U = -\mu_{11}\sinh(X)/(B + \cosh(X)) \\ V = V_0 + D_{11}/(B + \cosh(X)) \\ W = \mu_{12}\sinh(X)/(B + \cosh(X)) \\ \Theta = \Theta_0 + D_{12}/(B + \cosh(X)) \end{array} \right\} \quad (B > -1) \quad (12c)$$

$$P = P_0 + \mu_{23}X + \begin{cases} H_{11}(\ln \frac{e^X + e_{11}}{e^X + e_{22}} - h_1) & (B > 1) \\ H_{12}(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^X + 1}) & (B = 1) \\ H_{13}(2\arctg \frac{e^X + B}{\sqrt{-\Delta}} - h_3) & (B^2 < 1) \end{cases}$$

其中有关参数必须满足式(9b)、(10a)及(11a₄)。其中:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{11} = n\lambda/ka, \quad \mu_{12} = \lambda/a, \mu_{13} = J_0 e_2/\lambda \\ \mu_{21} = 2n/(ka \sqrt{B}), \quad \mu_{22} = 2/(a \sqrt{B}), \quad \mu_{23} = e_1/\lambda \\ D_{11} = C_1/A, \quad D_{12} = C_2/A, \quad D_{13} = 2/(\lambda A \sqrt{\Delta}) \\ D_{21} = C_1/(AB), D_{22} = C_2/(AB), D_{23} = e_2/(A \sqrt{B}) \\ H_{11} = H/\sqrt{\Delta}, \quad H_{12} = 2H, \quad H_{13} = H/\sqrt{-\Delta}, \quad H = e_2/(\lambda A) \end{array} \right. \quad (12d)$$

且有:

$$\begin{cases} X = \lambda\tau & (b \neq 0) \\ X = \tau/\sqrt{B} & (b = 0) \end{cases} \quad (12e)$$

通过以上分析可知:

非线性方程组(5)的解的基本性质是由参数 b 的符号性质决定的,即

- (1) 当 $b > 0$ 时,其解为周期解,且其周期与其相应的线性周期解的周期相等;
- (2) 当 $b \leq 0$ 时,解(12b)及(12c)为非线性方程组(1)的孤立波解(满足 G · Eilenberger 在文献[9]的孤立波定义);
- (3) 只有当层结不稳定或中性稳定时才存在孤立行波解。

下面,我们来讨论中性和不稳定层结大气中的孤立波解的基本性质。

4 孤立行波解的无量纲形式

为了使解的物理意义清楚,同时,使解的基本部分的特征突出,我们将解(12b)及(12c)改写成以下形式

$$\begin{cases} U' = 0 \\ V' = V - V_0 \\ W' = (nU - kW)/K \\ \Theta' = \Theta - \Theta_0 \\ P' = P - P_0 - \mu_{23}X \end{cases} \quad (13)$$

其中, U' 为平行于行波运动方向的速度, W' 为垂直于行波运动方向的速度, 故有

$$\begin{cases} U' = (kU + nW)/K = 0 \\ W' = (nU - kW)/K \end{cases} \quad (14)$$

4.1 振幅

定义 α 的振幅为:

$$\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min} \quad (\alpha = V', W', \Theta', P')$$

通过简单的计算可得以下振幅表达式

(1) 当 $b = 0$ 时

$$\begin{cases} \Delta V' = |D_{21}|, \Delta W' = |n\mu_{21} + k\mu_{22}| \\ \Delta\Theta' = |D_{22}|, \Delta P' = |\pi D_{23}| \end{cases} \quad (B > 0) \quad (15a)$$

(2) 当 $b < 0$ 时

$$\begin{cases} \Delta V' = |D_{11}/(B+1)|, \Delta W' = 2|n\mu_{21} + k\mu_{22}|, \Delta\Theta' = |D_{12}/(B+1)| & (B > -1) \\ \Delta P' = \begin{cases} 2|h_1 H_{11}| & (B > 1) \\ |H_{12}| & (B = 1) \\ 2|\bar{h}_3 H_{13}| & (B^2 < 1) \end{cases} \end{cases} \quad (15b)$$

$$\text{其中: } \bar{h}_3 = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{B}{\sqrt{-\Delta}}$$

为了简明地地表示解的无量纲形式, 我们引入下面一组式子

定义: $s(\alpha) = \alpha/|\alpha|$

$$\begin{cases} \delta_{11} = S(D_{21}), \delta_{12} = S(n\mu_{21} + k\mu_{22}) \\ \delta_{13} = S(D_{22}), \delta_{14} = S(\pi D_{23}) \end{cases} \quad (B > 0) \quad (16a)$$

$$\begin{cases} \delta_{21} = S(D_{11}), \delta_{22} = S(n\mu_{11} + k\mu_{12}), \delta_{23} = S(D_{12}) & (B > -1) \\ \delta_{24} = \begin{cases} S(h_1 H_{11}) & (B > 1) \\ S(H_{12}) & (B = 1) \\ S(\bar{h}_3 H_{13}) & (B^2 < 1) \end{cases} \end{cases} \quad (16b)$$

4.2 解的无量纲形式

定义解的无量纲形式为

$$\bar{\alpha} = \alpha'/\Delta\alpha \quad (\alpha = V', W', \Theta', P') \quad (17)$$

(1) 当 $b = 0$ 时

$$\begin{cases} \bar{V} = \delta_{11}/(1 + X^2) \\ \bar{W} = \delta_{12}X/(1 + X^2) \\ \bar{\Theta} = \delta_{13}/(1 + X^2) \\ \bar{P} = \frac{\delta_{14}}{2}\arctg(X) \end{cases} \quad (B > 0) \quad (18a)$$

(2) 当 $b < 0$ 时

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V} = \delta_{21}(B+1)/(B+\cosh(X)) \\ \bar{W} = \frac{\delta_{22}}{2}\sinh(X)/(B+\cosh(X)) \\ \bar{\Theta} = \delta_{23}(B+1)/(B+\cosh(X)) \end{array} \right\} \quad (B > -1)$$
$$\bar{P} = \delta_{24} \left\{ \begin{array}{ll} (\ln \frac{e^X + e_{11}}{e^X + e_{22}} - h_1)/|2h_1| & (B > 1) \\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{e^X + 1}) & (B = 1) \\ (2\arctg \frac{e^X + B}{\sqrt{-\Delta}} - h_3)/|2h_3| & (B^2 < 1) \end{array} \right. \quad (18b)$$

为了突出解的基本特征,我们定义不考虑符号 δ_{ij} 影响的新的解的无量纲形式。

(1) 当 $b = 0$ 时

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{V} = \bar{V}/\delta_{11}, \tilde{W} = \bar{W}/\delta_{12} \\ \tilde{\Theta} = \bar{\Theta}/\delta_{13}, \tilde{P} = \bar{P}/\delta_{14} \end{array} \right. \quad (19a)$$

(2) 当 $b < 0$ 时

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{V} = \bar{V}/\delta_{21}, \tilde{W} = \bar{W}/\delta_{21} \\ \tilde{\Theta} = \bar{\Theta}/\delta_{23}, \tilde{P} = \bar{P}/\delta_{24} \end{array} \right. \quad (19b)$$

有了以上结果,我们就可以方便地讨论物理量分布的基本特征。

5 孤立波的物理量分布特征

在这一节中,讨论中性和不稳定层结大气中孤立波的物理量分布特征。

5.1 孤立波的物理量分布的基本性质

当 $b = 0$ 时孤立波的物理量分布的基本性质如表 1 所示。

表 1 $b = 0$ 时孤立波的物理量分布的基本性质表

物理量	极值点	对称性	单调性
$\tilde{V}$	$\tilde{V}(\pm\infty) = 0$	$\tilde{V}(X) = \tilde{V}(-X)$	a) 当 $X: -\infty \nearrow 0$ 时, $\tilde{V}: 0 \nearrow 1$
	$\tilde{V}(0) = 1$	对称分布	b) 当 $X: 0 \nearrow +\infty$ 时, $\tilde{V}: 1 \searrow 0$
$\tilde{W}$	$\tilde{W}(\pm\infty) = 0$	$\tilde{W}(X) = -\tilde{W}(-X)$ 反对称分布	a) 当 $X: -\infty \nearrow -\sqrt{B}$ 时, $\tilde{W}: 0 \searrow -1/2$
	$\tilde{W}(\sqrt{B}) = 1/2$		b) 当 $X: -\sqrt{B} \nearrow \sqrt{B}$ 时, $\tilde{W}: -1/2 \nearrow 1/2$
	$\tilde{W}(-\sqrt{B}) = -1/2$		c) 当 $X: \sqrt{B} \nearrow +\infty$ 时, $\tilde{W}: 1/2 \searrow 0$
$\tilde{\Theta}$	$\tilde{\Theta}(\pm\infty) = 0$	$\tilde{\Theta}(X) = \tilde{\Theta}(-X)$	a) 当 $X: -\infty \nearrow 0$ 时, $\tilde{\Theta}: 0 \nearrow 1$
	$\tilde{\Theta}(0) = 1$	对称分布	b) 当 $X: 0 \nearrow +\infty$ 时, $\tilde{\Theta}: 1 \searrow 0$
$\tilde{P}$	$\tilde{P}(+\infty) = 1/2$	$\tilde{P}(X) = -\tilde{P}(-X)$	当 $X: -\infty \nearrow +\infty$ 时, $\tilde{P}: -1/2 \nearrow 1/2$
	$\tilde{P}(-\infty) = -1/2$	反对称分布	

* 符号说明: (1) $A: \alpha \nearrow \beta$ 表示 A 从 α 单调递增至 β ; (2) $A: \alpha \searrow \beta$ 表示 A 从 α 单调递减至 β 。

当 $b < 0$ 时孤立波的物理量分布的基本性质如表 2 的所示。

表 2 $b < 0$ 时孤立波的物理量分布的基本性质表

物理量	极值点	对称性	单调性
$\tilde{V}$	$\tilde{V}(\pm \infty) = 0$ $\tilde{V}(0) = 1$	$\tilde{V}(X) = \tilde{V}(-X)$ 对称分布	a) 当 $X: -\infty \nearrow 0$ 时, $\tilde{V}: 0 \nearrow 1$ b) 当 $X: 0 \nearrow +\infty$ 时, $\tilde{V}: 1 \searrow 0$
$\tilde{W}$	$\tilde{W}(+\infty) = 1/2$ $\tilde{W}(-\infty) = -1/2$	$\tilde{W}(X) = -\tilde{W}(-X)$ 反对称分布	当 $X: -\infty \nearrow +\infty$ 时, $\tilde{W}: -1/2 \nearrow 1/2$
$\tilde{\Theta}$	$\tilde{\Theta}(\pm \infty) = 0$ $\tilde{\Theta}(0) = 1$	$\tilde{\Theta}(X) = \tilde{\Theta}(-X)$ 对称分布	a) 当 $X: -\infty \nearrow 0$ 时, $\tilde{\Theta}: 0 \nearrow 1$ b) 当 $X: 0 \nearrow +\infty$ 时, $\tilde{\Theta}: 1 \searrow 0$
$\tilde{P}$	$\tilde{P}(+\infty) = 1/2$ $\tilde{P}(-\infty) = -1/2$	$\tilde{P}(X) = -\tilde{P}(-X)$ 反对称分布	当 $X: -\infty \nearrow +\infty$ 时, $\tilde{P}: -1/2 \nearrow 1/2$

* 符号说明同表 1。

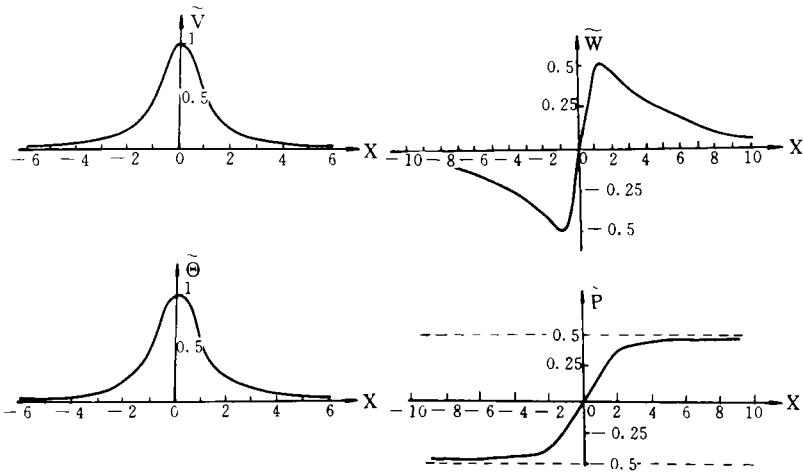


图 1 $b = 0$ 时孤立波的物理量分布图

5.2 孤立波的物理量分布图

当 $b = 0$ 时,孤立波的各物理量分布如图 1 所示。当 $b < 0$ 时,孤立波的各物理量分布如图 2 所示。

5.3 特例的合成分析

为了能直观地反映孤立波的物理量分布的整体特征,我们取两个特例作合成分析。
当 $b = 0$ 时,特例($\delta_{11} = \delta_{14} = -1, \delta_{12} = \delta_{13} = 1$)的合成图如图 3 所示。
当 $b < 0$ 时,特例($\delta_{21} = \delta_{24} = -1, \delta_{22} = 1, \delta_{23} = -1, B = 1$)的合成图如图 4 所示。

从图 3 和图 4 中可以看出中性和不稳定层结大气中存在具有以下性质的孤立波:

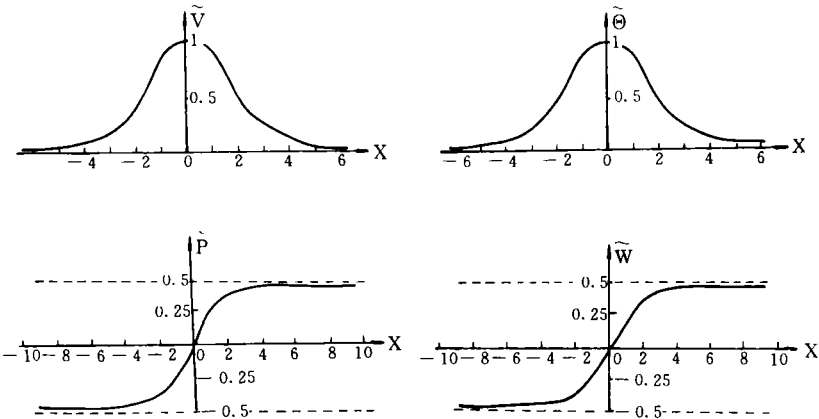


图 2 $b < 0$ 时孤立波的物理量分布图
(此图为参数 $B = 1$ 的图形)

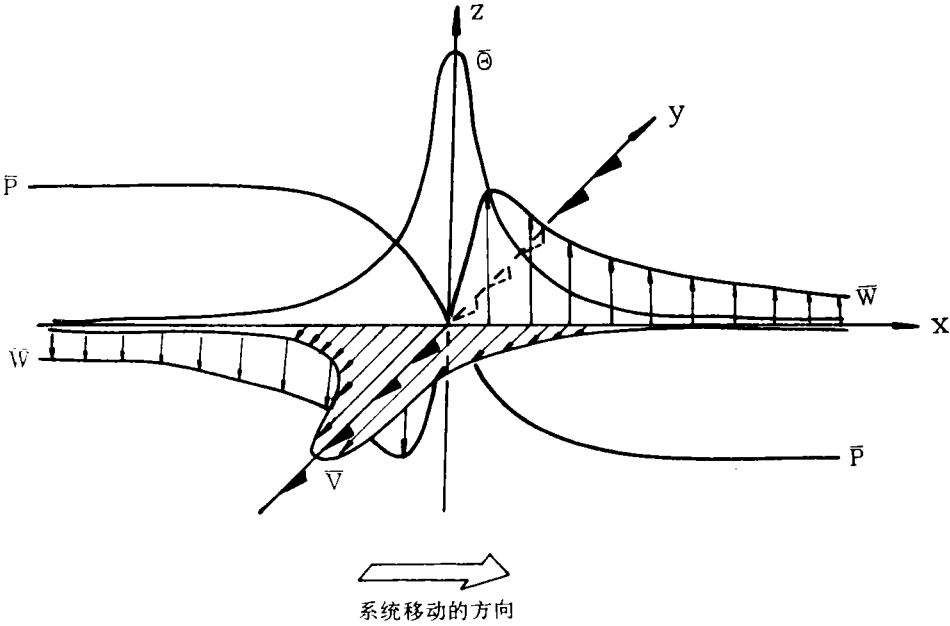


图 3 当 $b = 0, \delta_{11} = \delta_{14} = -1, \delta_{12} = \delta_{13} = 1$ 时孤立波的物理量分布合成图

- (1) 在孤立波的前部为低压区,后部为高压区,;而且,在孤立波中心附近的狭窄区域内气压出现非常明显的跃变;
- (2) 在孤立波中心,出现强烈的北风急流;
- (3) 在孤立波的前部为上升气流,后部为下沉气流;
- (4) 在孤立波中心出现孤立的暖(或冷)的位温中心。

参考文献

- [1] 刘式达, 刘式适. 大气非线性波动方程的解. 气象学报, 1982, 40 (3): 279—288.
- [2] 刘式适等. 层结切变流体非线性惯性重力内波的稳定性. 气象学报, 1984, 42 (1): 24—34.
- [3] 刘式达, 刘式适. 一类层结切变流和一些有关非线性解. 力学学报, 1984, 16 (2): 10—18.
- [4] 许秦. 层结大气中重力惯性重力波与飑线形成的非线性过程. 中国科学, (B), 1983, 3: 87—97.
- [5] 赵瑞星. 层结大气中重力惯性波的非线性周期解. 气象学报, 1990, 43 (3): 275—283.
- [6] 丁一汇. 高等天气学. 北京: 气象出版社, 1991. 477—478.
- [7] 蔡则怡等. 华北飑线系统的结构与演变特征. 大气科学, 1988, 12: 191—199.
- [8] A·科思, M·科思. 数学手册. 工人出版社, 1987. 720, 701, 704.
- [9] G·艾化伯格. 孤立子——物理学家用的数学方法. 科学出版社, 1989. 2—3.
- [10] Johnson R and Hamilton P J. The relationship of surface pressure features the precipitation and airflow structure of an intense midlatitude squall line. Mon Wea Rev, 1988, 116: 1442—1472.

THE ACCURATE SOLITARY WAVE SOLUTION OF THE UNSTABLELY AND NEUTRALLY STRATIFIED ATMOSPHERE

Zhou Jiangxing Ding Yihui Liu Yimin

(Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing, 100081)

Abstract

Through studying the wave solutions of the non-linear equations of the two-dimensional quasi-momentum non-divergent and non-frictional atmosphere, it is demonstrated that the characteristics of the nonlinear wave solution is determined by the sign of parameter b . If $b > 0$, the solution is periodic and period is the same as that of the linear solution. If $b \leq 0$, the solution is solitary wave. The analytical expression of the wave solution is given in this paper. It is found that the solitary waves in the unstably and neutrally stratified atmosphere have structures similar to the squall line. The distribution characteristics of the physical variables are given.

Key words: Solitary wave. Accurate solution. Stratified atmosphere.