

GRAPES 全球变分同化背景误差协方差的改进及对分析预报的影响： 背景误差协方差三维结构的估计^{* 1}

王金成^{1,2} 庄照荣^{1,2} 韩威^{1,2} 陆慧娟^{1,2}
WANG Jincheng^{1,2} ZHUANG Zhaorong^{1,2} HAN Wei^{1,2} LU Huijuan^{1,2}

1. 国家气象中心,北京,100081

2. 中国气象局数值预报中心,北京,100081

1. *National Meteorological Center, Beijing 100081, China*

2. *Numerical Weather Prediction Center of China Meteorological Administration, Beijing 100081, China*

2013-01-24 收稿,2013-10-09 改回.

王金成,庄照荣,韩威,陆慧娟. 2014. GRAPES 全球变分同化背景误差协方差的改进及对分析预报的影响:背景误差协方差三维结构的估计. *气象学报*, 72(1):62-78

Wang Jincheng, Zhuang Zhaorong, Han Wei, Lu Huijuan. 2014. An improvement of background error covariance in the global GRAPES variational data assimilation and its impact on the analysis and prediction: Statistics of the three-dimensional structure of background error covariance. *Acta Meteorologica Sinica*, 72(1): 62-78

Abstract The background error variance, horizontal correlation length and vertical correlation structure of the latest GRAPES version global model are estimated using the NMC method. The results show that the background error variance of the latest version GRAPES is much smaller than the previous version. The horizontal correlation length of the background error varies dramatically with the latitude and pressure levels. The statistical vertical correlation structures are more appropriate, especially for the stream function and the velocity potential. A single-point experiment for the statistical vertical correlation structure is performed and its result illustrates that the analysis increment distribution is more reasonable than using the vertical correlation structure produced by experienced formula.

Key words Background error covariance, NMC method, Global GRAPES model, Variational data assimilation

摘要 回顾并详细推导了估计背景误差协方差统计特征的美国国家气象中心(NMC)方法及其优缺点;采用 NMC 方法系统地估计了新版 GRAPES 全球模式的背景误差方差、水平相关特征尺度和垂直相关结构,并与欧洲中心模式结果进行了比较。结果表明,目前 GRAPES 全球模式的背景误差方差比以前有了显著减小;水平相关特征尺度随纬度和高度有显著变化;背景误差垂直相关结构与欧洲中心模式结果非常一致,相比经验公式结果更具物理意义,同时,单点试验结果也表明,更新后的垂直相关结构产生的分析增量更合理。通过与欧洲中心模式背景误差协方差三维结构的对比,分析了不同模式间背景误差协方差的异同及 GRAPES 全球同化分析系统目前存在的一些不足及可能原因。为新版 GRAPES 全球模式的三维变分系统提供了基本的背景误差协方差的三维结构。

关键词 背景误差协方差,美国国家气象中心(NMC)方法,GRAPES 全球模式,变分同化

中图法分类号 P435

* 资助课题:2012 年度中国气象局公益性行业专项(GYHY201206007)、2011 年度中国气象局公益性行业专项(GYHY201106008)、自然科学基金青年基金项目(41005055)。

作者简介:王金成,主要从事资料同化和数值天气预报研究;E-mail: wangjc@cma.gov.cn

1 引言

背景误差协方差矩阵实质上是预报误差的概率密度分布函数(Lorenc, 1986; Bannister, 2008a), 为变分同化中一个非常重要的参量, 不仅给出了背景场的权重, 还决定了观测信息如何在模式空间上传递, 并通过平衡关系将观测信息从一个变量传递给其他变量(Rutherford, 1972; Bannister, 2008a)。背景误差协方差在变分同化中起着关键作用, 其精度很大程度上决定了分析场的准确度和数值天气预报的预报技巧。近年来背景误差协方差的降低显著提高了分析场和预报的精度(Bannister, 2008b)。例如, 变分资料同化方法相比最优插值, 分析和预报精度得到明显改进, 这主要归功于在背景误差协方差矩阵中引入了动力平衡关系(Bannister, 2008b)。由于实际数值天气预报模式变量维数十分巨大, 一般为 10^7 量级或者更大, 因此, 在实际应用中准确计算和存储背景误差协方差矩阵是不可能的。在实际变分同化系统中, 一般采用控制变量变换的方法将预报变量转化为变量间不相关的控制变量, 然后假设这些控制变量在水平空间中的自相关具有同质性与各向同性, 则可以用高斯等理论模型模拟各控制变量的水平相关结构, 而在垂直方向上采用经验正交函数分解来模拟垂直相关结构, 这大大降低了背景误差协方差的维数, 同时保留了预报变量背景误差的主要特性(Parrish, et al, 1992; Bannister, 2008b)。通常情况下, 只需提供控制变量背景误差协方差矩阵的主要统计量, 包括随纬度和高度变化的方差, 水平相关特征尺度以及平均垂直相关结构(龚建东等, 2006a; 2006b; Rabier, et al, 1998; Wu, et al, 2002; 庄世宇等, 2005; 庄照荣等, 2006)。由于背景误差协方差矩阵对分析场的质量和预报技巧起关键作用, 世界上各数值天气预报中心在建立变分同化系统的过程中都十分注重背景误差协方差模型的设计与统计参数的估计(龚建东等, 2006a, 2006b; Rabier, et al, 1998; Wu, et al, 2002; 庄世宇等, 2005; 庄照荣等, 2006)。因此, 改进背景误差协方差是提高分析场精度和天气预报技巧的非常有效的方法(Derber, et al, 1999; 龚建东等, 2006a, 2006b)。

GRAPES 是全球/区域一体化数值预报系统, 是中国自主研发的新一代数值天气预报系统, 目前

已经取得了显著进步, 区域同化预报系统已经实现了业务化, 全球同化预报系统实现了准业务化(陈德辉等, 2006; 薛纪善等, 2008)。GRAPES 全球同化系统采用三维变分同化方案(GRAPES 3D-Var)。

一方面, 在 GRAPES 3D-Var 中, 背景误差方差是用美国国家气象中心(NMC)方法估计得到的, 水平相关特征尺度是采用新息向量法(Hollingsworth, et al, 1986)估计的(庄照荣等, 2006), 而垂直相关结构则是采用经验公式模拟的(薛纪善等, 2008)。随着 GRAPES 全球模式的改进和发展, 预报误差显著减小, 对 GRAPES 3D-Var 背景误差方差的更新是十分必要的; 新息向量法是 Hollingsworth 等(1986)提出的一种利用模式和观测之差来统计背景误差协方差和观测误差方差的方法, 用其估计的背景误差的水平相关尺度对观测量有很大的依赖性, 只有在足够多固定观测站点(如探空观测)的区域适用, 并且, 只能估计得到某个区域平均的背景误差水平相关特征尺度, 为了提高 GRAPES 三维变分同化系统的分析效果, 需要采用 NMC 方法重新估计随高度和纬度变化的更加精细的水平相关特征尺度; 同时经验公式不能模拟出势函数、非平衡位势高度和温度变量高低层之间的负相关结构, 不能满足现有 GRAPES 模式系统的需求, 因此, 需要将 GRAPES 3D-Var 的垂直相关结构更新为更为合理的统计结果。通过更新控制变量背景误差方差、水平相关特征尺度和垂直相关结构, 进一步提高 GRAPES 全球模式的预报技巧。另一方面, 虽然国际上对背景误差结构已经进行了很多研究, 但不同模式系统的背景误差协方差不完全相同, 并且, 迄今还没有对 GRAPES 全球模式背景误差协方差的三维结构进行系统的全面的分析和研究。

为了提高 GRAPES 全球模式三维变分同化系统的分析预报效果, 本研究采用 NMC 方法统计和分析了 GRAPES 全球模式背景误差协方差矩阵的三维结构, 为 GRAPES 三维变分系统提供一个与模式协调一致的背景误差协方差。与此同时, 采用相同方法对相同时段的欧洲中心模式预报资料进行统计, 估计了欧洲中心数值模式的背景误差协方差的三维结构。通过对 GRAPES 背景误差协方差的三维结构与欧洲中心数值模式背景误差协方差三维结构进行对比, 分析 GRAPES 背景误差协方差与欧洲中心背景误差协方差的异同点; 讨论了 GRAPES 三

维同化系统中存在的背景误差协方差计算问题,同时提出了一种不同模式间进行交叉对比验证从而提高预报效果思路。

2 GRAPES 全球变分同化预报系统与资料

2.1 分析预报系统

GRAPES 同化系统采用增量分析方案(庄世宇等, 2005), 其目标函数为

$$J(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}\delta\mathbf{x} + \mathbf{d})^T \mathbf{O}^{-1}(\mathbf{H}\delta\mathbf{x} + \mathbf{d}) \quad (1)$$

式中, $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_b$ 为分析变量 \mathbf{x} 的增量, \mathbf{x}_b 为背景场, \mathbf{H} 为观测算子 H 的切线性近似, \mathbf{B} 为背景误差协方差矩阵, \mathbf{O} 为观测误差协方差矩阵, $\mathbf{d} = H(\mathbf{x}_b) - \mathbf{y}_o$ 为观测余差, \mathbf{y}_o 为观测向量。

GRAPES 三维变分同化系统采用流函数 ψ 、势函数 χ 、非平衡位势高度 ϕ_u 和比湿 q (或相对湿度) 作为控制变量。在控制变量与预报变量进行变换的过程中, 质量场与风场之间采用线性平衡方案

$$\nabla^2 \phi_b = \nabla f \cdot \nabla \psi + f \nabla^2 \psi \quad (2)$$

式中, ϕ_b 为平衡的位势高度, f 为柯氏力参数。在控制变量的空间相关(自相关)方面, 水平方向上采用相关模型, 而在垂直相关结构上采用经验的或统计的相关结构。早期版本 GRAPES 全球三维变分是采用经验公式描述的垂直相关结构。

GRAPES 全球中期数值预报系统为半隐式半拉格朗日非静力的格点模式, 其水平格点分布为 Arakawa-C 跳点分布, 模式预报变量的垂直分布采用 Charney-Philips 跳层(薛纪善等, 2008)。模式分 36 层, 模式最高层可达 5 hPa 左右。背景场为 GRAPES 全球中期数值预报模式的 6 h 预报场。

2.2 资料

所用资料为 GRAPES 全球中期数值预报系统每天 2 次的 48 h 预报资料, 用来统计的资料水平分辨率与 GRAPES 模式运行分辨率相同, 均为 $1^\circ \times 1^\circ$ 。预报样本的初始场为 GRAPES 全球等压面分析预报循环系统(版本为 GRAPES_GFS_1-3-1-1)的 6 h 循环的分析场。预报样本时段为 2009 年 7 月 1—31 日, 预报初始场取样间隔 12 h, 因此, 用于估计的样本量为 62。欧洲中期天气预报中心(EC-MWF)同时段的全球模式预报 (http://data-portal.ecmwf.int/data/d/yotc_od/levtype=pl/type=

fc/) 资料, 其模式分辨率为 T1279, 用来统计的资料是由谱空间转化到格点空间的格点资料, 水平分辨率为 $0.125^\circ \times 0.125^\circ$, 用其估计与 GRAPES 相同控制变量的背景误差方差、水平相关特征尺度和垂直相关结构。

所有估计均采用 24 h 预报与 48 h 预报之差代表背景误差。为方便起见, GRAPES 全球同化预报系统原估计的误差用“GOLD”表示, 本文研究新估计的误差用“GNEW”表示, 欧洲中期天气预报中心结果用“EC”表示。

3 背景误差协方差主要统计特征的估计方法

在实际情况下, 大气真实状态是未知的, 并且, 背景误差协方差的维数也十分巨大, 同时缺少足够的预报误差样本来计算满秩的背景误差协方差矩阵。大气真实状态未知是计算背景误差协方差时面临的最基本的困难, 须用“代理”场来近似和模拟预报误差并在一些假设条件下进行简化(Bannister, 2008a), 例如: 用对同一时刻不同预报时效预报场的差作为背景误差, 用集合平均作为真值, 假设样本是各态遍历的等。目前主要有 5 种常用的估计背景误差协方差矩阵统计特征的统计方法, 分别是新息向量法、NMC 法、滞后 NMC 法、集合法和 CQ(Canadian Quick)法(Bannister, 2008a)。这里主要回顾一下适合全球背景误差协方差估计的 NMC 方法, 以及估计控制变量背景误差水平相关尺度的估计方法。

3.1 NMC 方法

NMC 方法就是利用对同一时刻变量的不同时效预报的差来计算该变量的背景误差协方差的一种方法。这里以 48 和 24 h 预报为例推导 NMC 方法的具体表达式。设 \mathbf{x}^{48} 与 \mathbf{x}^{24} 代表 48 和 24 h 预报时效的预报

$$\mathbf{x}^{48} = M_{48 \leftarrow 0} \mathbf{x}^a \quad t = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{x}^{24} = M_{24 \leftarrow 0} \mathbf{x}^a \quad t = 0 \quad (4)$$

式中, 上标 a 代表分析场, 设 48 和 24 h 预报场的随机误差分别为 $\boldsymbol{\eta}^{48}$ 和 $\boldsymbol{\eta}^{24}$, 系统性偏差分别为 \mathbf{b}^{48} 和 \mathbf{b}^{24} , 则

$$\mathbf{x}^{48} = \mathbf{x}' + \boldsymbol{\eta}^{48} + \mathbf{b}^{48} \quad (5)$$

$$\mathbf{x}^{24} = \mathbf{x}' + \boldsymbol{\eta}^{24} + \mathbf{b}^{24} \quad (6)$$

令

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}^{48} - \mathbf{x}^{24} \quad (7)$$

则有

$$\langle \delta x \delta x^T \rangle = \langle (\boldsymbol{\eta}^{48} + \mathbf{b}^{48} - \boldsymbol{\eta}^{24} - \mathbf{b}^{24}) \cdot (\boldsymbol{\eta}^{48} + \mathbf{b}^{48} - \boldsymbol{\eta}^{24} - \mathbf{b}^{24})^T \rangle \quad (8)$$

设 48 和 24 h 预报的系统性偏差相同,即

$$\mathbf{b}^{48} = \mathbf{b}^{24} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),得

$$\begin{aligned} \langle \delta x \delta x^T \rangle &= \langle (\boldsymbol{\eta}^{48} - \boldsymbol{\eta}^{24})(\boldsymbol{\eta}^{48} - \boldsymbol{\eta}^{24})^T \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\eta}^{48} \boldsymbol{\eta}^{48T} \rangle + \langle \boldsymbol{\eta}^{24} \boldsymbol{\eta}^{24T} \rangle - \langle \boldsymbol{\eta}^{48} \boldsymbol{\eta}^{24T} \rangle - \langle \boldsymbol{\eta}^{24} \boldsymbol{\eta}^{48T} \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

假设 48 与 24 h 预报的随机误差不相关,即

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\eta}^{48} \boldsymbol{\eta}^{24T} \rangle &= 0 \\ \langle \boldsymbol{\eta}^{24} \boldsymbol{\eta}^{48T} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

设 48 与 24 h 预报的随机误差的协方差都与背景误差协方差相同

$$\langle \boldsymbol{\eta}^{48} \boldsymbol{\eta}^{48T} \rangle = \langle \boldsymbol{\eta}^{24} \boldsymbol{\eta}^{24T} \rangle = \langle \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T \rangle \quad (12)$$

并将式(11)和(12)代入式(10),则背景误差协方差为

$$\mathbf{B} = \langle \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T \rangle = \frac{1}{2} \langle \delta x \delta x^T \rangle \quad (13)$$

背景场一般均为 6 h 预报,NMC 方法一般都采用更长时间预报的差(例如,这里采用 48 与 24 h 的差)。采用 24 h 间隔可以消除模式模拟的日循环的误差,但预报时效不是固定统一的,例如,可以采用 30 h 预报时效与 6 h 预报时效的差;但针对不同的模式要具体分析。

虽然 NMC 方法在观测较少的地区以及对大尺度系统的误差估计存在问题,但其相比新息向量方法,至少能够比较准确地估计观测较少地区的背景误差协方差。在观测较少的地区,NMC 方法容易低估背景误差的方差;而对于大尺度系统,NMC 方法容易高估背景误差的方差(Fisher, 2003)。NMC 方法统计背景误差协方差一般采用长期的平均,例如,一个月或者一个季节。NMC 方法仅适合于估计预报误差协方差的气候态,不能给出随流型变化的误差协方差(Bouttier, 1996)。但是,其可以估计出随季节变化的背景误差协方差。世界各大业务中心的经验表明,目前全球模式不同预报时效预报场的差对背景误差的代表性较好,NMC 方法是估计背景误差三维结构较好的选择(Rabier, et al, 1998; Wu et al, 2002),但与实际情况还是有不小的差距,故实际应用中要对 NMC 方法统计的背景误差协方差进行一定的调整。

3.2 背景误差方差估计

在 GRAPES 预报模式后处理系统中的模式变

量为风场、位势高度与比湿,在同化系统中需要估计预报误差的变量为流函数、势函数、非平衡的位势高度、比湿(或相对湿度),因此,需要进行从模式变量到控制变量的变量变换。流函数和势函数利用涡度、散度方程采用谱方法求解拉普拉斯方程得到

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{R \cos \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{R \cos \phi} \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial (u \cos \phi)}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial (u \cos \phi)}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\nabla^2 \psi = \zeta \quad (16)$$

$$\nabla^2 \chi = D \quad (17)$$

式中,R 为地球半径,从而可以利用风压场的线性平衡方程从流函数和势函数得到平衡的位势高度。从位势高度中扣除平衡的位势高度即为非平衡的位势高度信息

$$\nabla^2 \phi = f \nabla^2 \psi - \frac{u}{R} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (18)$$

3.3 水平相关特征尺度的估计方法

对水平相关特征尺度估计采用 Wu 等(2002)的方法,基本原理是用一个变量的方差与其拉普拉斯算子作用后的变量的方差来估计该变量的水平相关尺度,这里以流函数为例,流函数 ψ 在水平方向上两个点的协方差为

$$C_{\psi_1 \psi_2} = V_{\psi} XY \quad (19)$$

式中,下标 ψ_1 和 ψ_2 分别为点 (x_1, y_1) 和点 (x_2, y_2) 的流函数, $C_{\psi_1 \psi_2}$ 为 ψ_1 和 ψ_2 的协方差, V_{ψ} 为流函数的方差,假设流函数的方差为常数,即

$$V_{\psi} = \text{const} \quad (20)$$

设流函数水平方向上的相关满足高斯相关关系,并且,满足各向同性的假设,则有

$$\begin{aligned} X &= e^{-\frac{1}{2}\alpha\gamma^2} \\ Y &= e^{-\frac{1}{2}\alpha\mu^2} \end{aligned} \quad (21)$$

式中, $\alpha = L^{-2}$ 是水平相关特征尺度平方的倒数, $\gamma^2 = (x_1 - x_2)^2$ 和 $\mu^2 = (y_1 - y_2)^2$ 分别为 x 和 y 坐标轴上距离的平方。由式(19)与涡度和流函数的关系可以得到两点间涡度的水平协方差

$$C_{\zeta_1 \zeta_2} = \nabla_1^2 \nabla_2^2 C_{\psi_1 \psi_2} \quad (22)$$

式中, ζ_1 和 ζ_2 为在点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 处的涡度。将式(19)、(20)、(21)代入式(22)

$$C_{\zeta_1 \zeta_2} = 8\alpha^2 V_{\psi} XY \left[1 - \alpha(\gamma^2 + \mu^2) + \frac{\alpha^2}{8}(\gamma^2 + \mu^2)^2 \right] \quad (23)$$

令 $\gamma = \mu = 0$, 根据式(23)可以求得涡度的方差

$$V_{\zeta} = 8\alpha^2 V_{\psi} \quad (24)$$

由式(24)可以计算得到流函数 ψ 的水平相关特征尺度表达式

$$L = \left(\frac{8V_{\psi}}{V_{\zeta}} \right)^{1/4} \quad (25)$$

式(25)表明, 在变量误差水平协方差满足各向同性及同质性以及高斯相关的情况下, 水平相关特征尺度可以通过估计变量方差与其拉普拉斯算子作用后的变量的方差的比求得。

4 GRAPES 背景误差协方差分析

4.1 背景误差方差

方差是背景误差协方差最重要的一个统计参数, 其决定了变分同化系统中背景场的权重, 与观测误差的相对大小决定了背景场对分析场的贡献, 也决定了分析场能够从观测场中获得的信息量。图 1a、b 分别为 GRAPES 升级前后流函数 ψ 经向平均的背景误差方差。相比升级前, 新版 GRAPES 流函

数 ψ 的背景误差方差减小了一半以上, 特别是在 70 hPa 以下, 这表明升级后的 GRAPES 对流场的预报有了显著改进。但在 60°S 附近 50—10 hPa, GRAPES 升级后流函数 ψ 的背景误差方差却有所增大。图 1c 为 EC 模式流函数 ψ 的经向平均背景误差方差。升级后的 GRAPES 流函数 ψ 的背景误差方差随高度纬度分布型与 EC 结果相似, 都呈现出了南、北半球不对称性, 这反映了现代天气预报模式的普遍现象, 即对南半球预报效果要比北半球差。但 GRAPES 背景误差的纬度不对称性更强, 南半球的误差方差比北半球大得更多, 可能原因是在南半球同化的资料主要是卫星资料, 而 GRAPES 所同化的卫星资料相比 EC 模式要少, 同时, 这就使得南半球的观测在 GRAPES 变分同化系统中比北半球更重要。从整体上看, GRAPES 模式的背景误差方差比 EC 模式的背景误差方差要大, 特别是在南半球。因此, 改进 GRAPES 的现有卫星资料同化并同化新的更多卫星资料是降低南半球预报误差的重要途径之一。

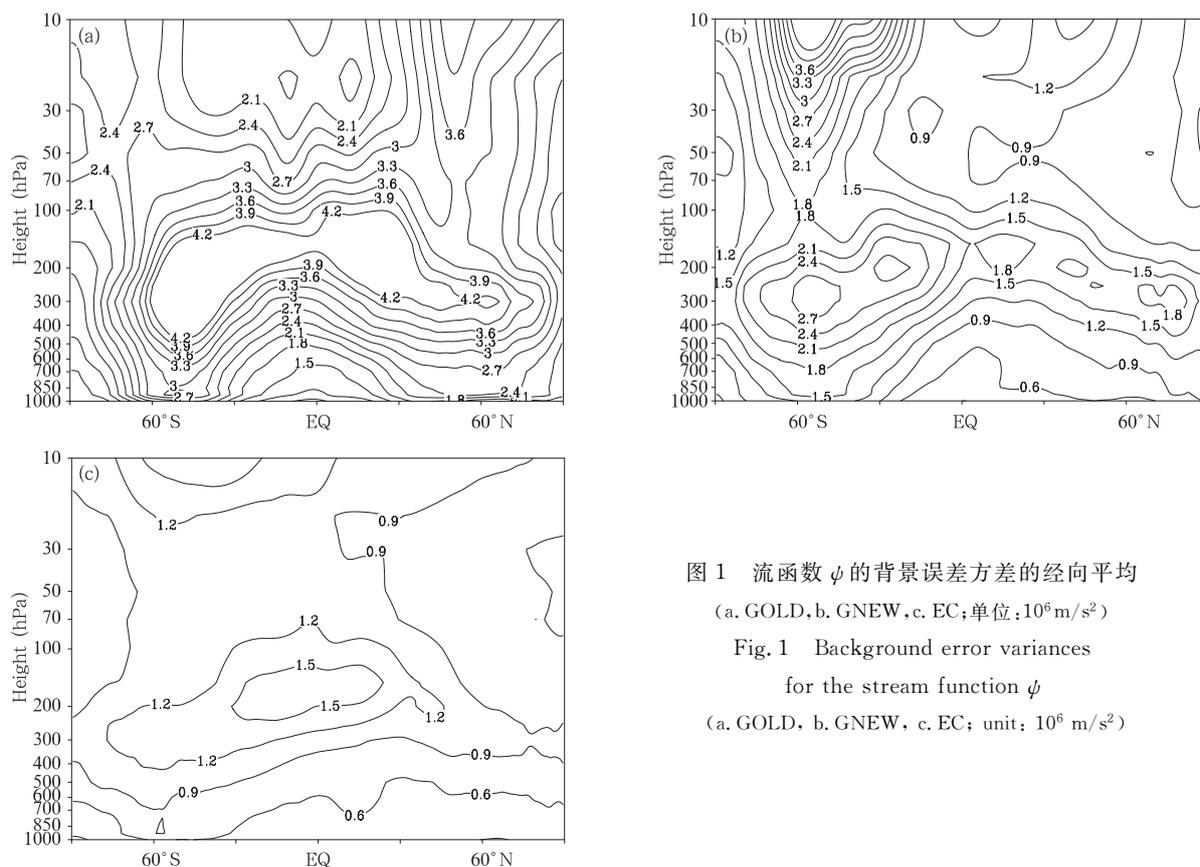


图 1 流函数 ψ 的背景误差方差的经向平均

(a. GOLD, b. GNEW, c. EC; 单位: $10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$)

Fig. 1 Background error variances for the stream function ψ

(a. GOLD, b. GNEW, c. EC; unit: $10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$)

图 2a—c 分别是 GRAPES 升级前后以及 EC 模式的势函数 χ 径向平均的背景误差方差。可以发现,GRAPES 升级后势函数背景误差方差减少了二分之一,与 EC 模式结果基本相同。同时,升级后的 GRAPES 势函数背景误差方差随纬度高度分布型与 EC 非常一致,大值中心都位于赤道上空 150 hPa 附近,同时基本都是南北对称分布型。

图 3a—c 分别为 GRAPES 升级前后和 EC 模式的非平衡位势高度 ϕ_0 经向平均的背景误差方差的纬度-高度分布。比较图 3a、b 发现,GRAPES 升级后非平衡位势高度的背景误差方差约为升级前的一半,与前面流函数和势函数背景误差方差结果一致。对非平衡位势高度背景误差方差,升级后的 GRAPES 的结果在量级上与 EC 模式结果相当,但是在南极地区 600 hPa 以下,升级前后 GRAPES 的结果都存在一个异常大值中心。垂直插值存在的问题可能是产生这个异常大值中心的原因。升级后 GRAPES 的非平衡位势高度背景误差方差在 30° — 60° S 上空 200—400 hPa 存在一个大值带,而 EC 模

式的结果不存在这样的大值。这与图 1 中流函数的结果相似,可能原因是 GRAPES 模式同化使用的卫星资料比 EC 少。因此,进一步说明了加强南半球卫星资料同化效果的改进是非常必要和紧迫的。

湿度场的同化对资料同化学者来说是一个挑战。因此,给出一个更加合理的湿度背景误差方差显得尤为重要,不仅对分析湿度背景误差方差的特性,还对提高湿度场的分析效果奠定很好的基础。图 4a—c 分别为 GRAPES 升级前后与 EC 模式经向平均的比湿背景误差方差。同流函数、势函数以及非平衡位势高度结果一致,升级后的 GRAPES 背景误差方差显著减小。升级后的 GRAPES 比湿的背景误差方差比 EC 模式的结果略小,但由于比湿的不确定性非常大,并不能说明 GRAPES 模式对湿度预报效果比 EC 模式预报的效果好。对比湿的背景误差方差,升级后的 GRAPES 的结果在南半球大值中心位于 30° S 上空 700—850 hPa 高度,相比 EC 结果偏南、偏高且量级偏小。

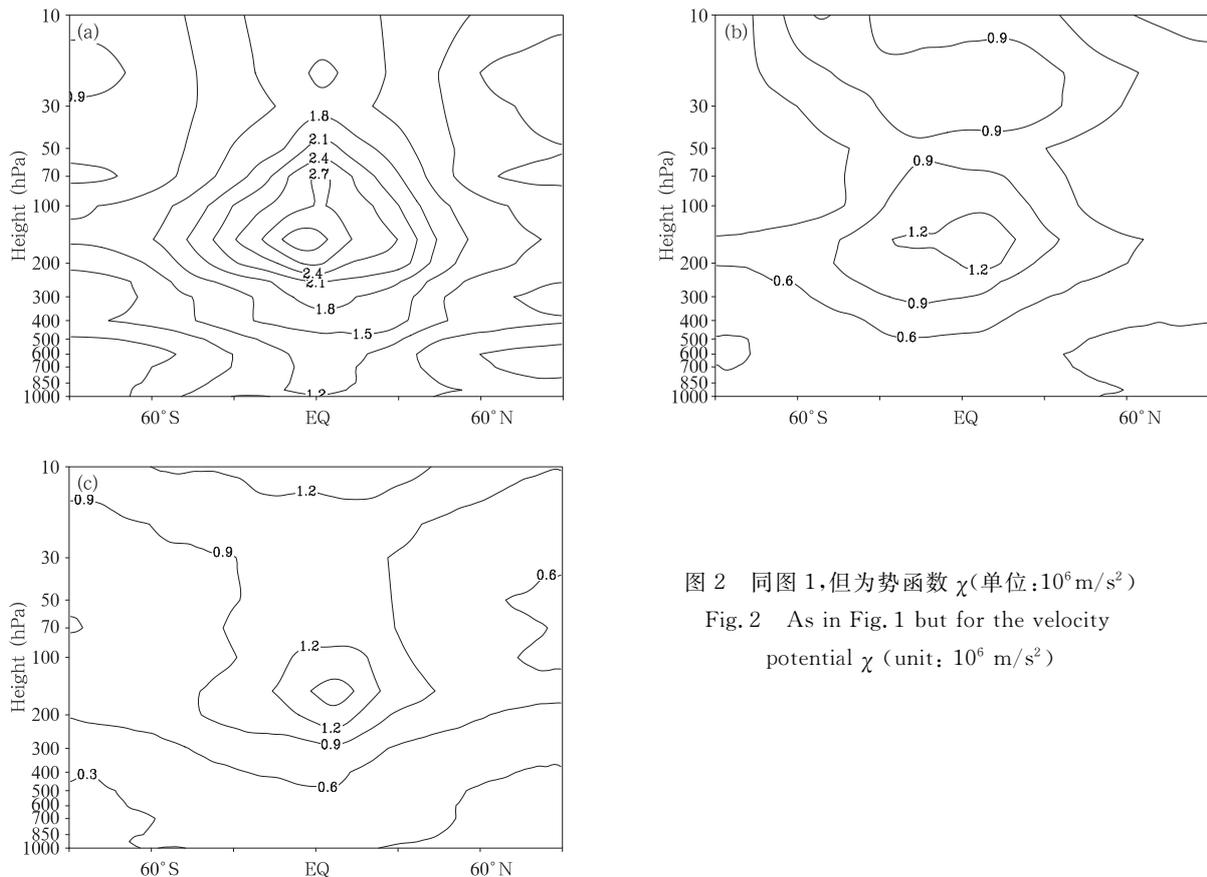


图 2 同图 1, 但为势函数 χ (单位: $10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$)

Fig. 2 As in Fig. 1 but for the velocity potential χ (unit: $10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$)

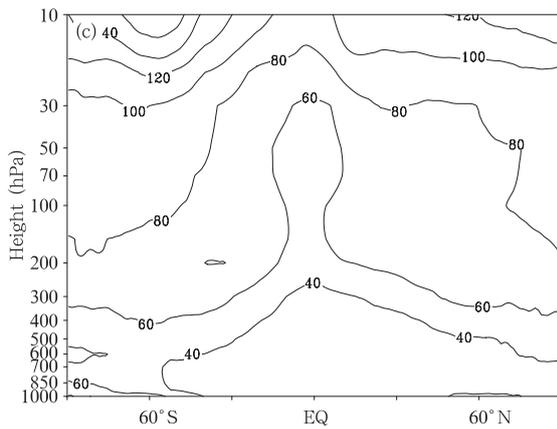
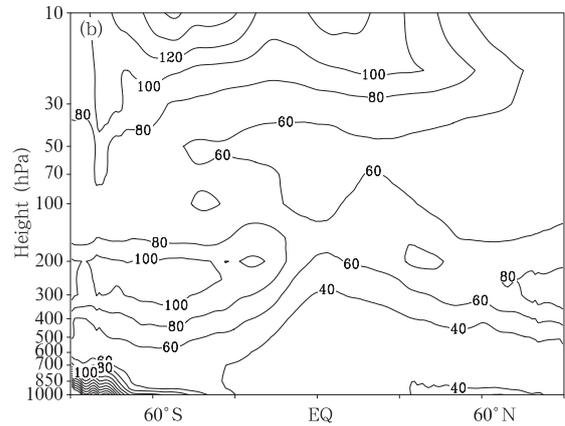
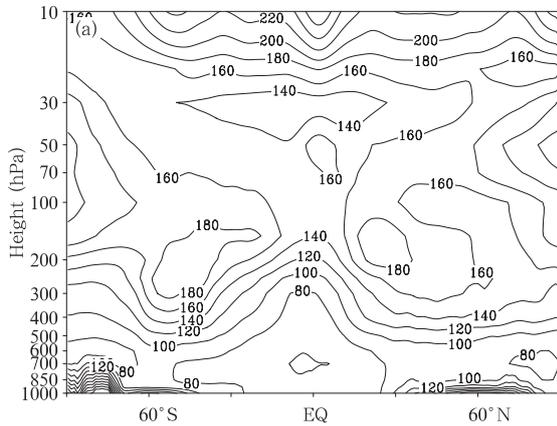


图3 非平衡位势高度 ϕ_u 背景误差方差的经向平均
(a. GOLD, b. GNEW, c. EC; 单位: gpm)
Fig. 3 As in Fig. 1 but for the unbalanced geopotential height ϕ_u (unit: gpm)

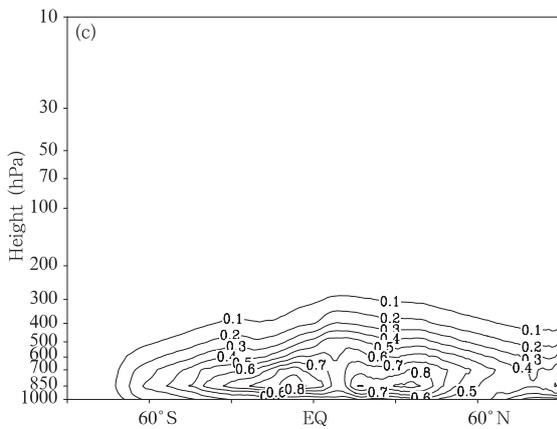
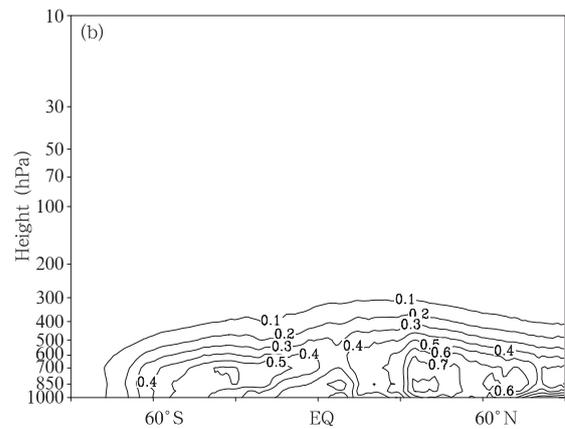
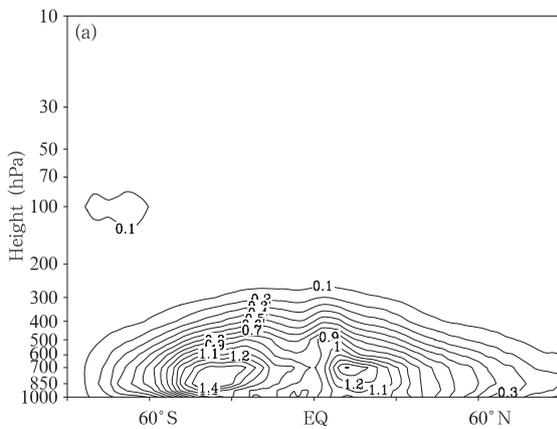


图4 比湿 q 的背景误差方差的经向平均
(a. GOLD, b. GNEW, c. EC; 单位: g/kg)
Fig. 4 As in Fig. 1 but for the specific humidity q (unit: g/kg)

4.2 背景误差水平相关结构

水平相关尺度决定了观测信息在模式空间中水平方向传播的距离,是建立背景误差协方差的一个关键参数。GRAPES 分析系统背景误差水平相关假定是各向同性,因而可以用相关模型来代替,主要采用高斯相关和二阶自回归相关模型表示。高斯相关模型为

$$\rho(r) = e^{-\frac{r^2}{2L^2}} \quad (26)$$

式中, r 为两点的距离, L 为水平相关尺度。二阶自回归相关模型(SOAR)为

$$\rho(r) = (1 - |c|) \left(1 + \frac{r}{L}\right) e^{-\frac{r}{L}} + |c| \quad (27)$$

式中, c 为参考系数,经过试验结果的比较,在 GRAPES 全球三维变分同化系统中 $c = 0.11$ 。GRAPES 背景误差水平相关模型如图 5 所示。

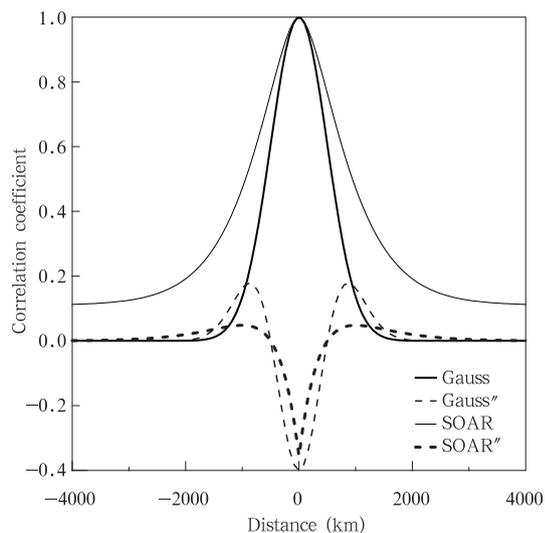


图 5 GRAPES 采用的背景误差水平相关模型及其二阶导数随距离的变化 (粗实线和细实线分别是二阶自回归相关模型(SOAR)和高斯相关模型;粗虚线和细虚线分别是二阶自回归相关模型和高斯相关模型的二阶导数函数)

Fig. 5 Horizontal correlation functions and their second derivatives vs. distance as done in the GRAPES 3D-Var (see the text for further details)

GRAPES 控制变量流函数、势函数、非平衡的位势高度和湿度变量的水平相关用模型表示,由控制变量和分析变量的关系,其他变量的相关也是确定的。由图 5 可以看出高斯型相关幅度大小,二阶

自回归相关幅度较大,但较远相关不为 0,观测的影响会影响到无穷远。由流函数、势函数与风场的关系,相关模型二阶导数表征风场自身的相关特征,从图 5 中还可以看出控制变量的相关型为高斯相关,二阶导数最大值和最小值的比例不符合实际风场的特点。当控制变量为二阶自回归相关模型时,导出风场负相关幅度比较合理。

确定控制变量的水平相关模型后,水平相关特征尺度可以通过新息向量方法(庄照荣等, 2006; 薛纪善等, 2008)或者 NMC 方法估计。但新息向量法因为资料限制需要各向同性与全球同质的假设条件,这就决定了一般情况下只能获得全球平均的水平相关特征尺度。大气动力学表明,水平相关特征尺度随纬度和高度有显著变化。并且,随着数值天气预报水平的提高,三维变分同化采用全球平均的水平相关特征尺度已不能满足业务精度的需要。更加精确地背景误差水平相关特征尺度能够提高变分同化的质量和水平。在 3.3 节中介绍了 NCEP 采用 NMC 方法统计背景误差水平相关特征尺度的方法(Wu, et al, 2002)。目前,GRAPES 3D-Var 中采用的北半球中纬度典型的水平相关特征尺度、流函数、势函数和非平衡位势高度的水平相关特征尺度是 500 km,比湿的水平相关特征尺度是 200 km,庄照荣等(2006)、薛纪善等(2008)介绍了详细的估计方法。

图 6 为 NMC 方法估计的流函数 ψ 背景误差水平相关特征尺度经向平均场,图 6a 使用的是升级后的 GRAPES 模式预报资料,而图 6b 使用的是 EC 模式预报资料。可见流函数的背景误差水平相关特征尺度随纬度和高度有显著变化;水平相关特征尺度随高度增大,特别是在平流层,水平特征尺度随高度的增加而增大得比较明显。在赤道地区 50 hPa 以上存在水平相关特征尺度大值中心;水平相关特征尺度在 100 hPa 以上,从赤道向两极方向减少;300—100 hPa,流函数的水平相关特征尺度随纬度变化较小;而 1000—300 hPa,水平相关特征尺度从赤道向南北纬递减。

比较图 6a、b 发现,升级后的 GRAPES 模式的背景误差水平相关特征尺度为 EC 的背景误差水平相关特征尺度的 1.5 倍左右。这与采用新息向量法估计获得的相关尺度差别较大,即使是在观测比较密集的北半球。这可能与 GRAPES 模式水平分辨

率有关,这里采用的 GRAPES 模式的水平分辨率为 $1^\circ \times 1^\circ$ 。这种统计背景误差水平相关特征尺度的方法与模式分辨率有很大关系;产生这种结果也可能是由于 GRAPES 模式还存在一定的不足,尚需要深入研究和发掘,这对发现模式不足和改进模式会有很大帮助。

图 7a、b 分别为用 NMC 方法估计的升级后 GRAPES 和 EC 的势函数 χ 背景误差水平相关特征尺度经向平均场。比较图 7.6 发现,势函数与流函数的水平相关特征尺度随高度纬度的分布型非常

一致,并且,尺度大小也很接近,这里不再赘述。

图 8a、b 分别为 NMC 方法估计的升级后的 GRAPES 和 EC 模式的非平衡位势高度 ϕ_u 背景误差水平相关特征尺度经向平均场。可见非平衡位势高度的背景误差水平相关特征尺度随纬度有显著的变化,而随高度的变化并不显著,特别是 EC 的结果。比较图 8a、b 可见,升级后的 GRAPES 的非平衡位势高度的背景误差水平相关特征尺度比 EC 的结果大 1 倍左右。这与流函数和势函数的对比结果一致,这可能是由于模式分辨率不同产生的。

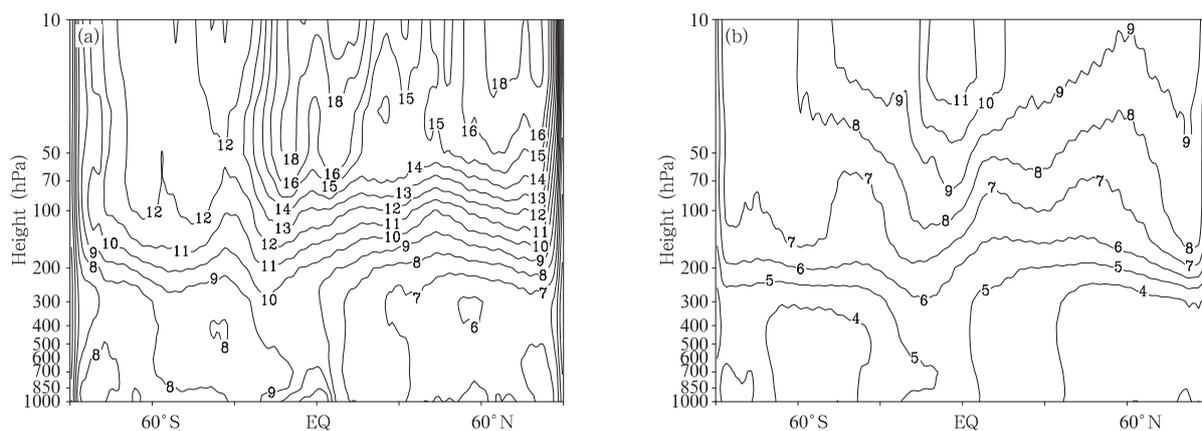


图 6 流函数 ψ 的背景误差水平相关特征尺度的经向平均

(a. GNEW, b. EC; 单位: 10^2 km)

Fig. 6 Horizontal correlation length of background error for the stream function ψ

(a. GNEW, b. EC; unit: 10^2 km)

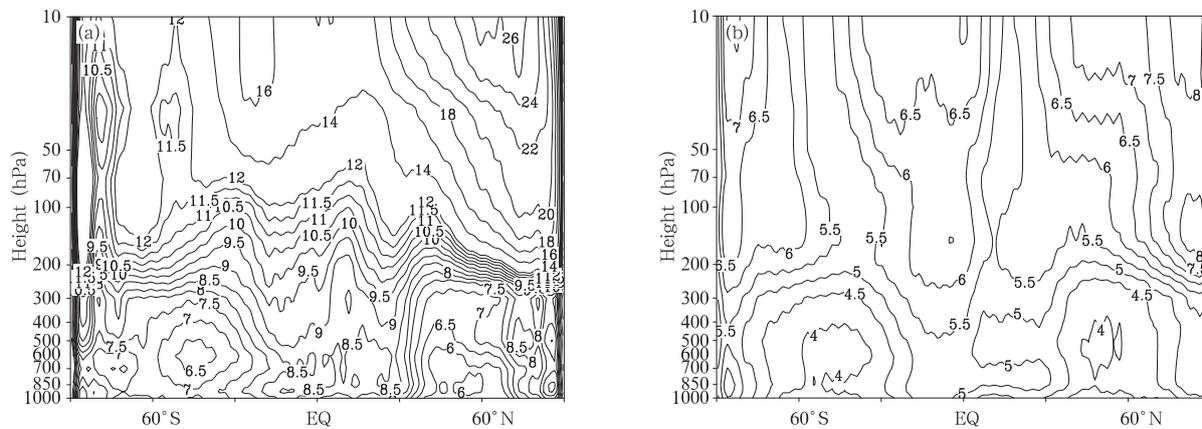


图 7 势函数 χ 的背景误差水平相关特征尺度的经向平均

(a. GNEW, b. EC; 单位: 10^2 km)

Fig. 7 As in Fig. 6 but for the velocity potential χ (unit: 10^2 km)

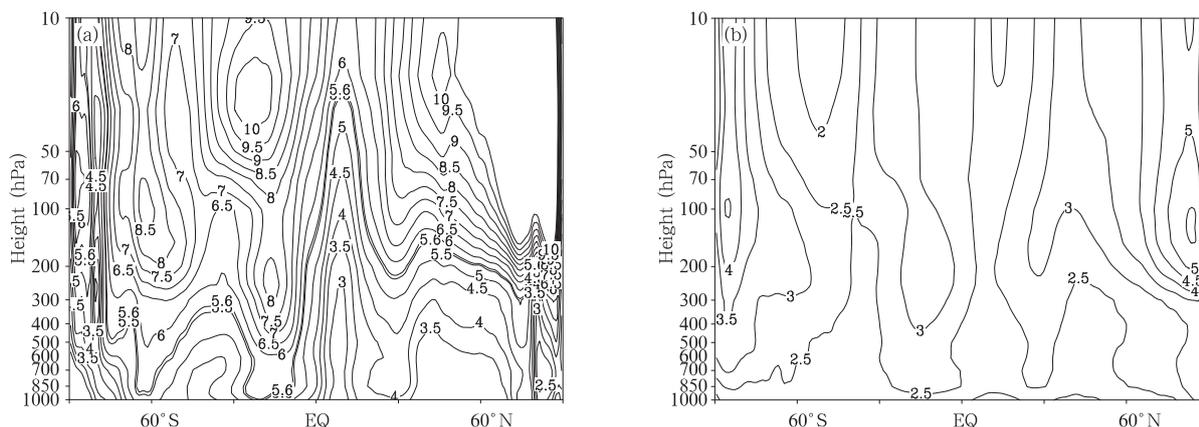


图 8 非平衡位势高度 ϕ_u 的背景误差水平相关特征尺度的经向平均
(a. GNEW, b. EC; 单位: 10^2 km)

Fig. 8 As in Fig. 6 but for the unbalanced geopotential height ϕ_u (unit: 10^2 km)

图 9a、b 分别为 NMC 方法估计的升级后 GRAPES 和 EC 的比湿 q 背景误差水平相关特征尺度经向平均场。可以看出,EC 的比湿背景误差水平特征相关尺度在 500 hPa 以下,南北纬 30° — 60° 附近存在两个大值中心,而在 300—200 hPa 高层,湿度背景误差水平相关特征尺度的大值中心位于赤道地区;同时在南北极地区上空存在两个大值中心。图 9a 表明 GRAPES 的湿度的背景误差水平相关特征尺度在 500 hPa 以下存在多个大值中心,对纬度梯度很大;在南北极地区也存在不合理的大值中心;在南半球 30° 地区的 200 hPa 以上存在一个大值中

心。比较图 9a、b 可见,GRAPES 的比湿背景误差水平相关特征尺度比 EC 的大 1 倍以上。

比较图 9、8、7、6 发现,流函数和势函数的背景误差水平相关特征尺度分布型一致,大小相当;非平衡位势高度的背景误差水平相关特征尺度比流函数及势函数的背景误差水平相关特征尺度要小很多;比湿的背景误差水平相关特征尺度是 4 个控制变量中最小的。整体水平相关尺度随高度的增加而增大,而且,赤道区域的相关尺度要大于中高纬度的水平相关尺度。

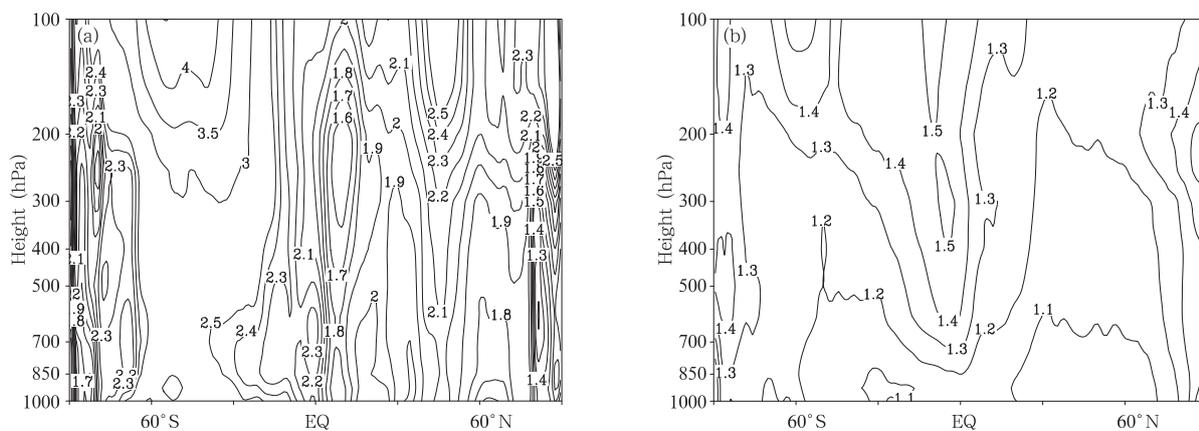


图 9 比湿 q 的背景误差水平相关特征尺度的经向平均
(a. GNEW, b. EC; 单位: 10^2 km)

Fig. 9 As in Fig. 6 but for the specific humidity (unit: 10^2 km)

4.3 背景误差垂直相关结构

背景误差的垂直相关决定了观测信息如何在模式空间垂直方向上传播,特别是对亮温等这类天底探测的卫星资料的同化效果起着决定性作用。目前,GRAPES采用的垂直相关结构不合理可能是限制GRAPES同化系统对卫星资料同化效果并导致南半球模式预报效果较差的重要原因之一。

GRAPES 3D-Var采用经验公式模拟的垂直相关结构。气压层 p_1 与在气压层 p_2 上某大气变量背景误差的垂直自相关 $r(p_1, p_2)$ 可以通过经验公式

计算

$$r(p_1, p_2) = \frac{1}{1.0 + L_k \left(\ln \frac{p_1}{p_2} \right)^2} \quad (28)$$

式中, L_k 为待定参数。在升级前的GRAPES 3D-Var系统中,流函数、势函数和非平衡位势高度场参数 $L_k = 5$,比湿的参数为 $L_k = 20$ 。图10a为由经验公式计算的5个特征气压层上的流函数、势函数、非平衡位势高度与其他气压特征层的垂直相关。

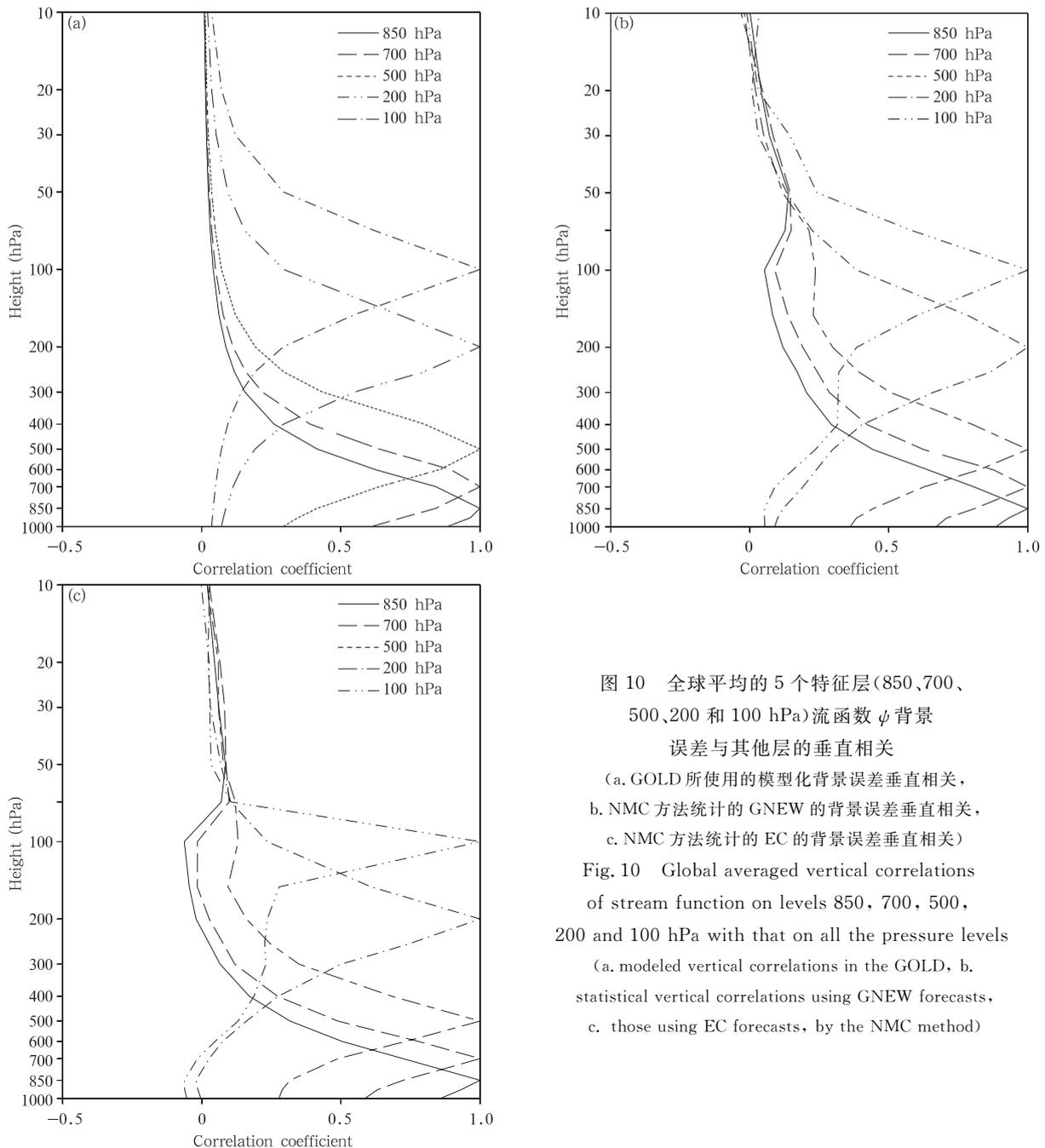


图10 全球平均的5个特征层(850、700、500、200和100 hPa)流函数 ψ 背景误差与其他层的垂直相关

(a. GOLD所使用的模型化背景误差垂直相关, b. NMC方法统计的GNEW的背景误差垂直相关, c. NMC方法统计的EC的背景误差垂直相关)

Fig. 10 Global averaged vertical correlations of stream function on levels 850, 700, 500, 200 and 100 hPa with that on all the pressure levels (a. modeled vertical correlations in the GOLD, b. statistical vertical correlations using GNEW forecasts, c. those using EC forecasts, by the NMC method)

比较图 10a、b 可见,NMC 方法统计的 GNEW 全球平均的流函数的背景误差垂直相关与模型化的垂直相关几乎完全相同,这说明经验公式对流函数的垂直相关结构描述得很好。比较图 10b、c 发现,EC 的流函数背景误差垂直相关与 GNEW 预报场统计的结果非常接近。

图 11 为 5 个特征气压层上的势函数背景误差与其他气压层上的相关。图 11a、b 分别为 NMC 方法统计的 GNEW 和 EC 的势函数背景误差垂直相关,并且,GNEW 和 EC 的势函数背景误差垂直相关相当一致。相比模型计算的势函数背景误差垂直相关(图 10a),NMC 方法估计的 850—700 与 400—

100 hPa 的势函数背景误差存在明显的负相关,相关系数可达 -0.4 。高低层势函数背景误差存在负相关完全符合大气动力学中的低层辐合(辐散)造成高层辐散(辐合)。这表明模型计算的流函数背景误差垂直相关结构不合理。同时不难发现,NMC 方法统计的势函数背景误差垂直相关结构的正相关范围比模型化的正相关范围要小得多,以 500 hPa 上势函数背景误差与其他层背景误差的相关为例,NMC 方法统计的相关系数向上在 400 hPa 和向下在 700 hPa 已经减至 0,而模型化的背景误差垂直相关系数向上至 200 hPa 才减至 0,而向下至 1000 hPa 才减至 0.2 左右。

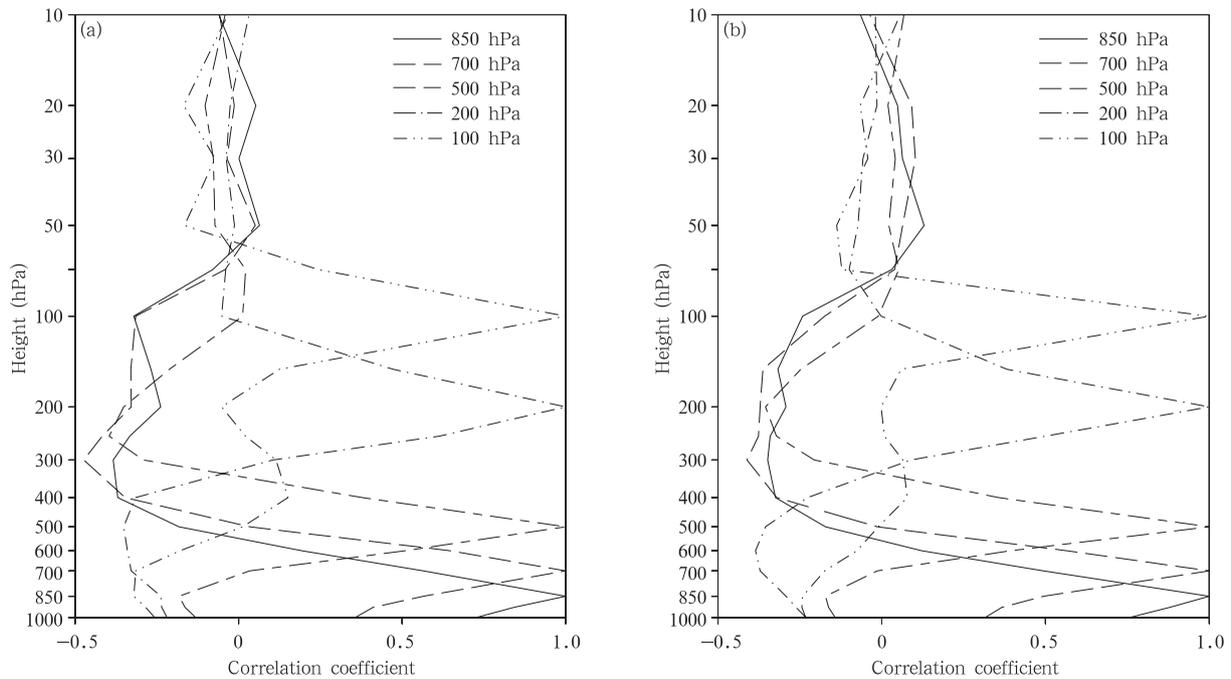


图 11 全球平均的 5 个特征层(850、700、500、200 和 100 hPa)势函数 χ 背景误差与其他层的垂直相关
(a. NMC 方法统计的 GNEW 的背景误差,b. NMC 方法统计的 EC 的背景误差)

Fig. 11 Global averaged vertical correlations of velocity potential background error on levels 850 hPa, 700 hPa, 500 hPa, 200 hPa and 100 hPa with that on all the pressure levels
(The statistical vertical correlations are calculated using the GNEW forecasts (a), and EC forecasts (b), by the NMC method)

图 12 为 5 个特征气压层上非平衡位势高度与其他气压层上的相关。结果与流函数完全相似,同样相同的是 GNEW 和 EC 的结果吻合得非常好。与势函数不同的是非平衡位势高度背景误差高低层的负相关没有那么明显,最大负相关为 -0.25 。同

时与势函数背景误差垂直相关结构结果相似之处是 NMC 方法统计的非平衡位势高度背景误差垂直相关结构的正相关范围比模型化的正相关范围要小许多。对于比湿背景误差垂直相关结构(图 13a—c),模型计算的结果与 NMC 方法统计结果非常接近。

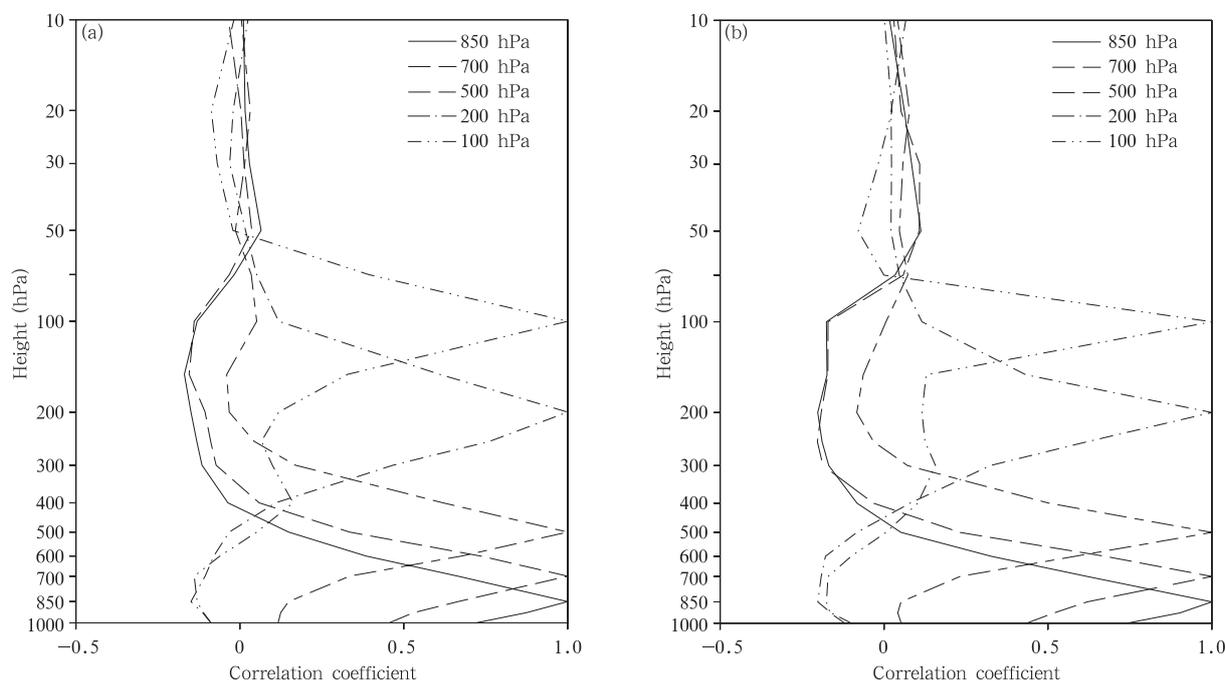


图 12 全球平均的 5 个特征层(850、700、500、200、和 100 hPa)

非平衡位势高度 ϕ_u 背景误差与其他层的垂直相关

(a. NMC 方法统计的 GNEW 的背景误差, b. NMC 方法统计的 EC 的背景误差)

Fig. 12 As in Fig. 11 but for the unbalanced geopotential height

通过上述分析表明, NMC 方法统计获得的各控制变量背景误差垂直相关结构更合理。本研究设计了单点试验进一步理解新的背景误差垂直相关结构对分析的影响。将观测点放置在(30°N, 120°E), 位势高度的观测增量为 10 gpm, 风速观测增量为 10 m/s。

图 14 为观测位势高度分析增量的经度-高度剖面。图 14a、c、e 是使用模型化背景误差垂直相关结构; 图 14b、d、f 是使用 NMC 方法统计的 GNEW 的背景误差垂直相关结构。比较发现当位势高度观测在 100 hPa(图 14a、b)上时, 以 0.5 等值线作为观测的影响范围, 模型化的背景误差垂直相关结构将观测信息向上约传递至 50 hPa, 向下约传递至 300 hPa, 而最新统计的背景误差垂直相关结构将观测信息向上约传递至 70 hPa, 向下约传递至 400 hPa 附近, 但 200—400 hPa 分析增量的水平范围比较小。当位势高度的观测在 500 hPa(图 14c、d)时, 模型化背景误差垂直相关结构将观测信息向上传递至 100 hPa, 向下传递至 1000 hPa, 最新统计

的背景误差垂直相关结构将观测信息向上传递至 50 hPa, 但 200—50 hPa 时分析增量在水平区域很小。当位势高度观测在 850 hPa(图 14e、f)时, 模型化背景误差的垂直相关结构将观测信息向上可以传递至 50 hPa, 最新统计的背景误差垂直相关结构的观测信息只能影响至 300 hPa。图 15 是观测为纬向风场时, 纬向风的分析增量的纬度-高度剖面, 图 15a、c、e 使用模型化背景误差垂直相关结构, 而图 15b、d、f 使用 NMC 方法统计的 GNEW 的背景误差垂直相关结构。比较发现, 采用模型化背景误差垂直相关结构, 100 hPa 上观测的纬向风(图 15a、b)向上可以影响到模式层顶, 向下影响到地面, 这是非常不合理的; 而采用最新统计的背景误差垂直相关结构, 100 hPa 上的纬向风观测的信息向上只能传递至 70 hPa, 向下只能传递到 500 hPa。使用模型化的背景误差相关结构, 500 hPa 上(图 15c、d)的纬向风的观测影响到了整个模式层, 1000 hPa 的分析增量可以达到 0.6 m/s; 而采用最新统计的背景误差垂直相关结构 500 hPa 上观测的纬向风信息向上传

递到模式层顶,向下也能影响到 1000 hPa,但相比模型化的背景误差垂直相关结构,相同量级的分析增量的垂直范围明显小。比较可见,850 hPa(图 15e、f)纬向风观测信息在使用模型化的背景误差垂直相关结构时,信息传递到整层大气,且分析增量大

于 0.3 m/s 的范围为 1000—150 hPa,且整层的分析增量均为正值;使用最新统计的背景误差垂直相关结构,在 200—100 hPa 存在一个中心在 150 hPa 附近的负的分析增量区域。

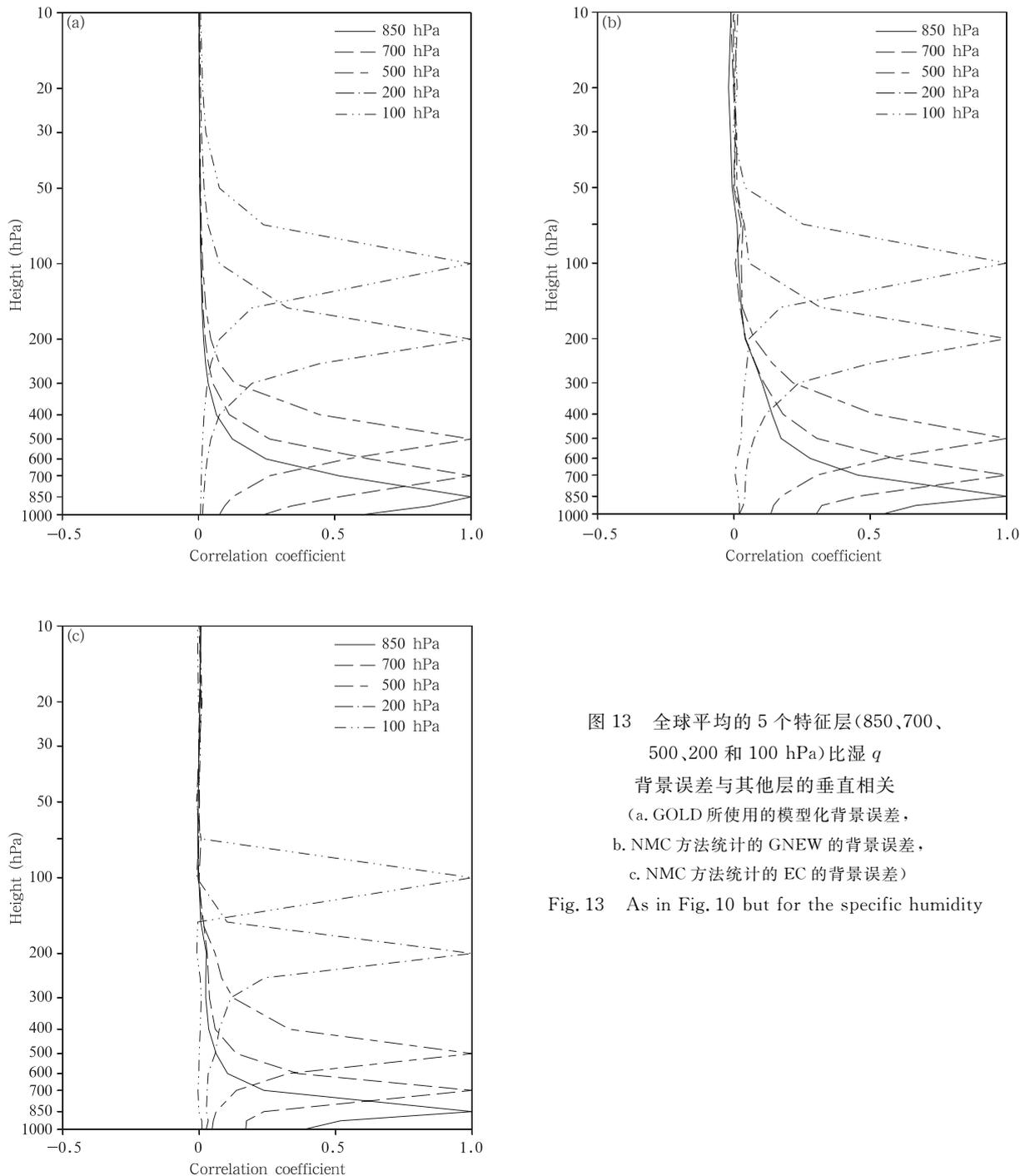


图 13 全球平均的 5 个特征层(850、700、500、200 和 100 hPa)比湿 q 背景误差与其他层的垂直相关
(a. GOLD 所使用的模型化背景误差, b. NMC 方法统计的 GNEW 的背景误差, c. NMC 方法统计的 EC 的背景误差)

Fig. 13 As in Fig. 10 but for the specific humidity

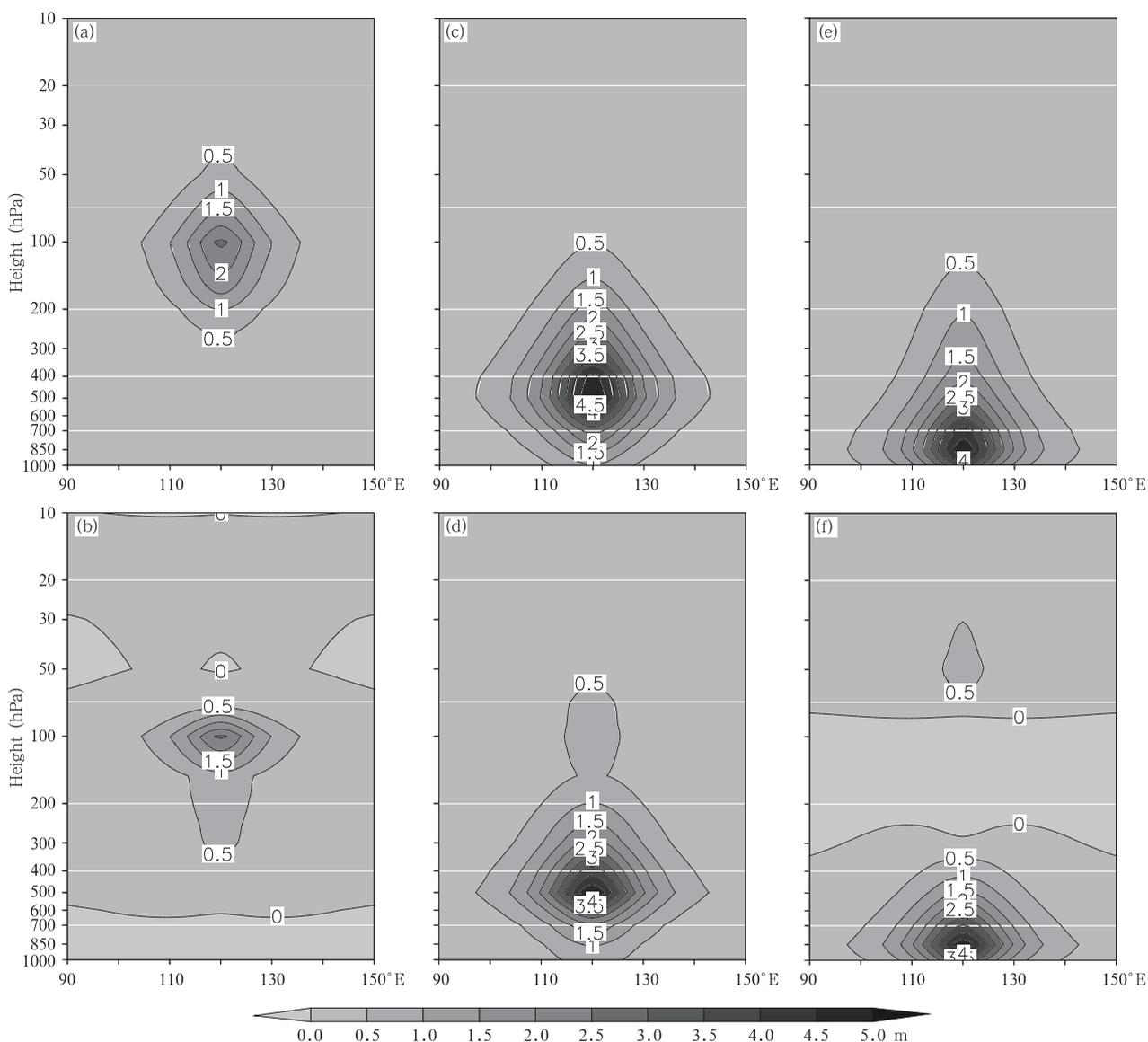


图 14 观测位势高度分析增量的经度-高度剖面

(a, b. 观测在 100 hPa; c, d. 观测在 500 hPa; e, f. 观测在 850 hPa; a, c, e. 使用模型化背景误差垂直相关结构, b, d, f. 使用 NMC 方法统计的 GNEW 的背景误差垂直相关结构)

Fig. 14 Height-longitudinal cross-sections of the analysis increments of geopotential height observed on the various levels

(a, b, 100 hPa; c, d, 500 hPa; e, f, 850 hPa; a, c, e. modeled vertical correlations; b, d, f. statistical vertical correlations estimated by the NMC method)

5 总结和讨论

本文回顾了估计背景误差协方差统计特征的 NMC 方法,并简述了 NMC 方法的优缺点。采用 NMC 方法系统地估计了描述 GRAPES 全球模式背景误差协方差三维结构的主要统计参数。得到了 GRAPES 全球模式背景误差方差的纬度-高度二维分布、水平相关特征尺度的纬度-高度二维分布和全

球平均的垂直相关结构,并将这些结果与 EC 模式的结果进行了对比。不仅给出了 GRAPES 背景误差协方差三维结构的全面描述,也诊断出了 GRAPES 模式和同化系统可能存在的不足及原因,为 GRAPES 三维变分同化系统的改进和模式预报效果的提高提供了基础,同时也提供了采用模式间交叉比较验证来分析和发现模式问题的一种思路。主要结果如下:

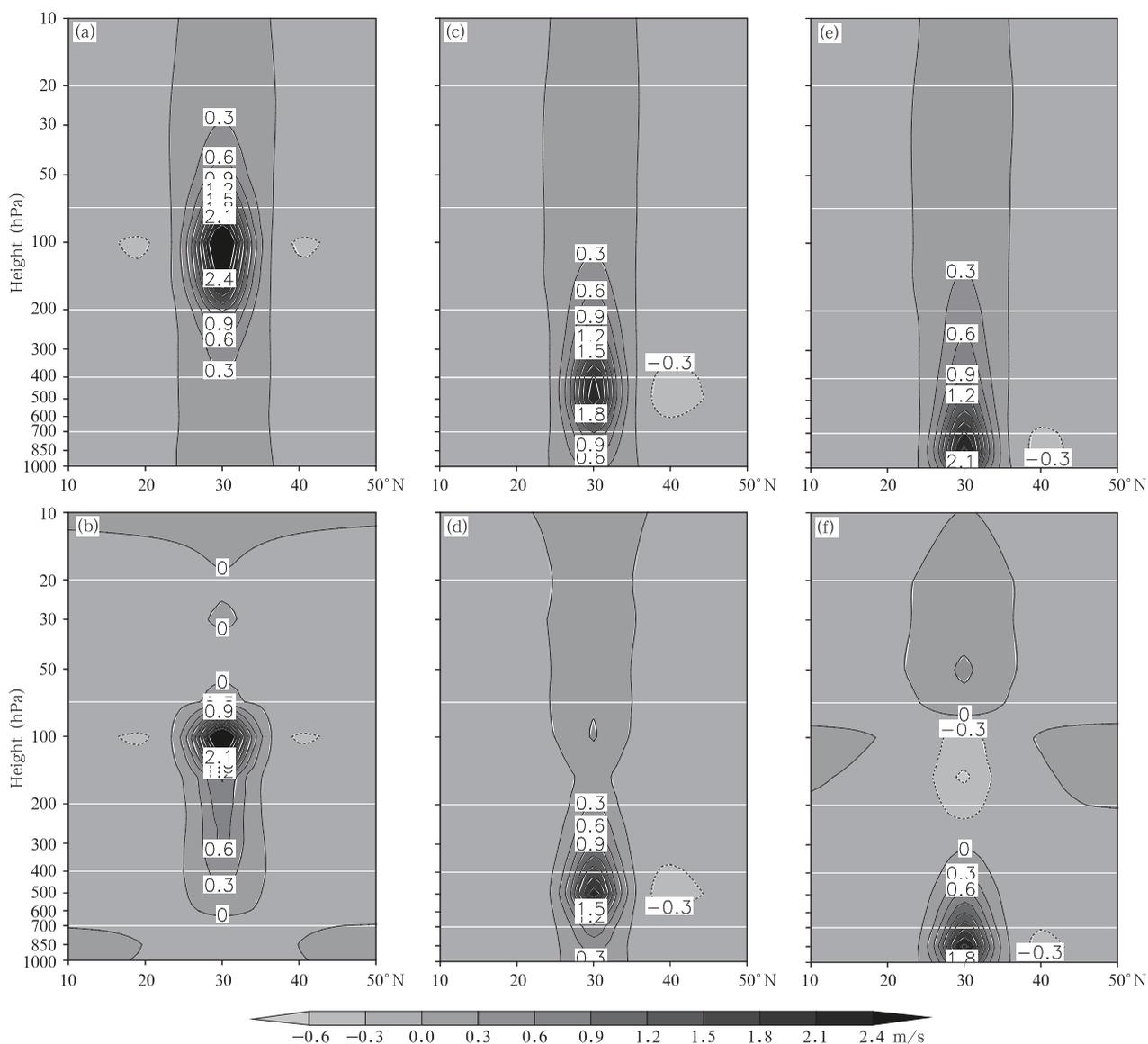


图 15 观测为纬向风场时,纬向风分析增量的纬度-高度剖面

(a,b, 100 hPa,c,d, 500 hPa,e,f, 850 hPa;a,c,e. 使用模型化背景误差垂直相关,b,d,f. 使用 NMC 方法统计的 GNEW 的背景误差垂直相关结构)

Fig. 15 As in Fig. 14 but for the zonal wind

(1)GRAPES 全球模式的背景误差方差比升级前有了显著减小,且分布型与欧洲中期天气预报中心全球模式统计结果更为接近;流函数、势函数和非平衡位势高度背景方差具有如下特点:在中高纬度对流层高层存在大值中心,这对应了对流层高层西风急流区较大;流函数的方差在南半球模式高层较大,与模式预报在高层不准确,特别是冬季预报误差更大有关。相比 EC 模式背景误差方差,GRAPES 南半球的背景误差较大,可能是 GRAPES 同化卫星资料的数量和质量都有所欠缺所致。

(2)水平相关特征尺度随纬度和高度有显著不同,相比 EC 的水平相关特征尺度,GRAPES 的水平相关特征尺度较大,这可能与 GRAPES 的水平分辨率比 EC 的水平分辨率低有关。流函数、势函数和非平衡位势高度的背景误差水平相关特征尺度总体上呈现随高度增大,赤道地区水平相关特征尺度大,中高纬度水平相关特征尺度小的特点,这与实际天气系统的特点相吻合。

(3)背景误差垂直相关结构较之前 GRAPES 变分同化中使用的模型化垂直相关结构更加合理,特

别是对于速度势函数与非平衡位势高度场的垂直相关结构,统计结果体现了大气对流层最基本的低层辐合(辐散)高层辐散(辐合)的关系。单点试验结果表明更新后的垂直相关结构产生的分析增量更加合理。通过分析发现,原系统中不合理的背景误差垂直相关结构可能是造成 GRAPES 对卫星资料分析效果欠佳的主要原因。

(4)GRAPES 背景误差协方差与 EC 模式背景误差协方差最大的不同之处在于背景误差方差大小和分布型以及水平相关特征尺度,而两个模式背景误差的垂直相关结构非常一致。

本研究利用 NMC 方法直接统计了 GRAPES 全球三维变分系统背景误差方差、水平相关尺度和垂直相关结构,但受到 NMC 方法的局限性限制,上述的统计结果还存在一定不足,需要对各变量结果进行一定的订正后才能应用于 GRAPES 变分同化系统中。例如,因 NMC 方法统计背景误差方差受模式预报偏差的影响,流函数在对流层高层以上随纬度和高度变化的梯度太大,而且受模式后处理插值的影响,非平衡的位势高度在地形以下存在较大梯度,这些都需要进行订正。水平相关特征尺度的统计建立在高斯相关模型的基础上,而控制变量选用高斯相关模型时,不能很好描述风场的特征,目前系统采用二阶自回归相关模型,而上述估计的水平相关尺度是在高斯自回归模型的假设条件下进行的,在未来工作中,将在二阶自回归相关模型的基础上统计相关特征尺度。另外一个问题是本文仅仅统计了夏季一个月的背景误差协方差,而背景误差协方差,特别是背景误差方差的大小和分布型随季节有显著变化,冬季的背景误差协方差的三维结构以及背景误差协方差随季节的变化特征尚需深入研究。垂直相关结构对卫星资料同化效果的影响是一个非常有趣且值得深入研究的内容,这为认识和提高卫星资料同化效果提供线索。

参考文献

陈德辉,沈学顺. 2006. 新一代数值预报系统 GRAPES 研究进展. 应用气象学报, 17(6):773-777

龚建东,魏丽,陶士伟等. 2006a. 全球资料同化中误差协方差三维

- 结构的准确估计与应用 I: 观测空间协方差的准确估计. 气象学报, 64(6):669-683
- 龚建东,赵刚. 2006b. 全球资料同化中误差协方差三维结构的准确估计与应用 II: 背景误差协方差调整与数值试验分析. 气象学报, 64(6):684-698
- 薛纪善,陈德辉. 2008. 数值预报系统 GRAPES 的科学设计与应用. 北京: 科学出版社, 383pp
- 庄世宇,薛纪善,朱国富等. 2005. GRAPES 全球三维变分同化系统: 基本设计方案与理想试验. 大气科学, 29(6):872-884
- 庄照荣,薛纪善,庄世宇等. 2006. 资料同化中背景场位势高度误差统计分析的研究. 大气科学, 30(3):533-544
- Bannister R N. 2008a. A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. I: Characteristics and measurements of forecast error covariances. Quart J Roy Meteor Soc, 134(637): 1951-1970
- Bannister R N. 2008b. A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation II: Modelling the forecast error covariance statistics. Quart J Roy Meteor Soc, 134(637):1971-1996
- Bouttier F. 1996. Application of Kalman filtering to numerical weather prediction//Proceedings of the 1996 ECMWF Seminar on Data Assimilation. ECMWF: Reading, UK,61-90
- Derber J,Bouttier F. 1999. A reformulation of the background error covariance in the ECMWF global data assimilation system. Tellus, 51(2):195-221
- Fisher M. 2003. Background error covariance modelling//ECMWF Seminar on Recent Developments in Data Assimilation for Atmosphere and Ocean. ECMWF: Reading UK, 45-64
- Hollingsworth A, Lönnerberg P. 1986. The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. Part I: The wind field. Tellus, 38(2): 111-136
- Lorenz A C. 1986. Analysis methods for numerical weather prediction. Quart J Roy Meteor Soc, 112(474):1177-1194
- Parrish D F, Derber J C. 1992. The National Meteorological Center's spectral statistical-interpolation analysis system. Mon Wea Rev, 120(8): 1747-1763
- Rabier F, McNally A, Andersson E, et al. 1998. The ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). II: Structure functions. Quart J Roy Meteor Soc, 124: 1809-1829
- Rutherford I D. 1972. Data assimilation by statistical interpolation of forecast error fields. J Atmos Sci, 29:809-815
- Wu W S, Rurser R J, Parrish D F. 2002. Three-dimensional variational analysis with spatially inhomogeneous covariances. Mon Wea Rev, 130(12):2905-2916