

可压二维大气中三类定常基态的稳定性分析

周江兴 丁汇 刘益民

(国家气候中心开放实验室, 北京 100081)

摘 要

本文讨论了可压、绝热、无耗散的二维大气中三类定常基态的稳定性问题, 并严格证明了这三类定常基态的稳定性性质是由基态的特征矩阵的性质所决定的:

- a. 若在域 $G +$ 内处处为正定矩阵, 则基态是稳定的;
- b. 若在域 $G +$ 内非处处为半正定矩阵, 则基态是不稳定的。

关键词: 可压大气, 对称稳定性, 能量积分法。

1 引 言

对称稳定性理论近二三十年来得到了迅速的发展, 并引起了广泛的重视, 对称稳定性分析被应用于多种天气系统的发展性问题研究, 如: Kuo^[1] 分析了行星环流的对称稳定性问题, Ooyama^[2] 将对称稳定性分析应用于轴对称台风涡旋的发展性问题研究, Hoskins^[3, 4] 将对称稳定性分析引入中尺度扰动发展问题的研究, 他们的工作使得人们对这些天气系统的初期发展的条件有了一定认识。在线性对称稳定性理论发展的同时, 非线性对称稳定性理论也得到很大的发展, 如: Walton^[5]、Emanuel^[6]、Xu^[7] 等人用不同的方法研究了非线性对称稳定性问题, 最近, 穆穆^[8] 给出了他在这方面的一些新的研究成果。关于对称稳定性问题的研究已有大量的工作; 丁一汇和沈新勇^[9, 10] 对对称稳定性问题的研究作了综述。

目前, 线性对称稳定性理论已日趋完善, 非线性对称稳定性理论也得到了很大的发展; 但是, 在线性对称稳定性方面还有不少问题尚待进一步研究, 如: 对称的定常非地转流的线性对称稳定性问题, 耗散大气中的线性对称性问题, 可压大气中的线性对称稳定性问题等等; 因而, 线性对称稳定性理论还有待于进一步的完善和发展。

关于不可压(或动量不可压)、绝热、无耗散二维大气中广义地转定常流的线性对称稳定性问题的研究已有大量的工作^[2-4, 11-13]。最近, 作者较系统地研究了这类问题的统一性, 并给出了这类稳定性问题的较为一般的判据^[14]。对于可压大气中的非均匀基态的线性对称稳定性研究工作较少, 然而, 实际大气是可压的, 这就明确地提出了一个问题: 如何判别可压大气中对称稳定性性质。解决了这个问题, 才能深刻地认识大气可压性在对称稳定性问题中的作用, 才能透彻地了解不可压近似下的对称稳定性判据的适用范围; 因而, 对这一理论问题的深入研究是有实际意义的。为了使得研究具有实际意义, 选取了直角坐

标系、柱标系和球坐标系中的三类典型的对称稳定性问题作为研究对象,它们分别对应于中尺度、台风涡旋和行星环流的对称稳定性问题。由于这三类对称稳定性问题的基本数学结构是相同的,故本文将这三类对称稳定性问题进行了统一的分析,这有利于对这一大类问题的基本性质有一个完整的、概括的了解。本文较为系统、严格地分析了可压大气中这三类气象研究中常用的非均匀定常态基态的线性稳定性质。

2 基本方程、基本定义、基本关系

经研究表 1 中所列的三类定常态基态的稳定性问题,其稳定性分析可归结为式(1—1c)统一形式的线性扰动方程组定解问题的解的性质的研究。

表 1 原始方程及基态表

	直角坐标	柱坐标	球坐标
原始方程	$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f v - \tilde{f} w \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{r} p - f u \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{r} z p + \tilde{f} u - g \\ \frac{d}{dt} + \mathbf{V} = 0 \\ \frac{dp}{dt} + k p = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{uv}{r} - f v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{r} p + \frac{u^2}{r} + f u \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{r} z p - g \\ \frac{d}{dt} + \mathbf{V} = 0 \\ \frac{dp}{dt} + k p = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f v - \tilde{f} w + \frac{uv \tan \theta}{r} - \frac{uw}{r} \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{r} p - f u - \frac{u^2 \tan \theta}{r} - \frac{vw}{r} \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{r} p - \frac{k}{r^2} + \tilde{f} u + \frac{u^2 + v^2}{r} \\ \frac{d}{dt} + \mathbf{V} = 0 \\ \frac{dp}{dt} + k p = 0 \end{cases}$
基态	$\begin{cases} \bar{v} = \bar{w} = 0 \\ -\frac{1}{r} \bar{p} - f \bar{u} = 0 \\ -\frac{1}{r} z \bar{p} - g + \tilde{f} \bar{u} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{v} = \bar{w} = 0 \\ -\frac{1}{r} \bar{p} + \frac{\bar{u}^2}{r} + f \bar{u} = 0 \\ -\frac{1}{r} z \bar{p} - g = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{v} = \bar{w} = 0 \\ -\frac{1}{r} \bar{p} - \frac{\bar{u}^2 \tan \theta}{r} - f \bar{u} = 0 \\ -\frac{1}{r} \bar{p} + \tilde{f} \bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{r} - \frac{1}{r^2} = 0 \end{cases}$
说明	$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{V} &= v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{V} &= \frac{1}{r} r (v \frac{\partial}{\partial r}) + w \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial r} \\ \mathbf{V} &= \frac{(\cos \theta) v}{r \cos \theta} + \frac{(r^2 w)}{r^2 r} \end{aligned}$

注: $f = 2 \sin \theta$, $\tilde{f} = 2 \cos \theta$, $k = c_p / c_v$, g 及 θ 为引力参数。

2.1 线性扰动方程组定解问题的统一形式

a. 线性扰动方程组:

$$\begin{cases} i U = - \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{M}} \\ i (h^2 V) = - \frac{h}{x_1} p + \left(\frac{h}{x_1^2} x_1 \bar{p} \right) + (M_1 x_1 M_0) U \\ i W = - \frac{h}{x_2} p + \left(\frac{h}{x_2^2} x_2 \bar{p} \right) + (M_1 x_2 M_0) U \\ i = - \frac{1}{h} \quad (\bar{\mathbf{V}}) \\ i p = - \frac{1}{h} (\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{p}} + k \bar{p} - \mathbf{V}) \end{cases} \tag{1}$$

其中: $\mathbf{V} = V_{x_1} + W_{x_2}$, $(\mathbf{V}) = x_1 (V) + x_2 (W)$, 为标量函数。方程(1)中各

符号在 3 种坐标系中的具体形式见表 2。

表 2 各符号在三种坐标系中的具体形式

	x_1	x_2	U	V	W	p	h	h_1	$\bar{M}$	M_1	M_0
直角坐标	y	z	u'	v'	w'	p'	1	1	$\bar{u} - f y + \tilde{f} z$	1	$-f y + \tilde{f} z$
柱坐标	r	z	$r^2 u'$	$r v'$	$r w'$	p'	r	1	$r \bar{u} + \frac{1}{2} f r^2$	$\bar{M}$	$-r^{-2}$
球坐标	r	$r^2 \cos^2$	$u' r \cos$	$w' r^2 \cos$	w'	p'	$r^2 \cos$	r	$r \cos \bar{u} + r^2 \cos^2$	$\bar{M}$	$-(r \cos)^{-2}$

b. 定常态基态的平衡关系:

由表 1 中定常态基态所满足的方程可以导出定常态基态满足以下平衡关系:

$$\frac{1}{\bar{p}} \wedge \bar{\omega} = -M_1 \bar{M} \wedge M_0$$

(1a)

在本文中,假定基本量 $\bar{u}, \bar{\omega}, \bar{p}$ 在与圆盘同胚的闭集 $G + \partial G$ 内(∂G 为边界)为 $C^{(1)}$ 类有界函数,并且 $\bar{\omega} > 0$ 。

c. 初始条件:

$$\begin{cases} U|_{t=0} = U^0, & V|_{t=0} = V^0, & W|_{t=0} = W^0 \\ \bar{\omega}|_{t=0} = \bar{\omega}^0, & p|_{t=0} = p^0 \end{cases}$$

(1b)

其中: $U^0, V^0, W^0, \bar{\omega}^0, p^0$ 为域 $G + \partial G$ 内的 $C^{(1)}$ 类有界函数。

d. 边界条件:

在本文中取刚性边界条件:

$$(W dx_1 - V dx_2)|_{\partial G} \equiv 0$$

(1c)

由(1c)显然可以导出以下关系:

$$(\int_{\partial G} W dx_1 - \int_{\partial G} V dx_2) \equiv 0$$

(1d)

$$((\int_{\partial G} W dt) dx_1 - (\int_{\partial G} V dt) dx_2)|_{\partial G} \equiv 0$$

(1e)

为了便于讨论,先引入有关的一些重要的基本概念。

2.2 基本定义:

a. 基态的稳定性定义

若对于所有 $C^{(1)}$ 类有界的初值,某基态所对应的定解问题(1) — (1c) 的解具有这样的性质,即:存在正常数 K ,使得 $\|U\|, \|V\|, \|W\|, \|\bar{\omega}\|, \|p\| < K$,则称此基态是稳定的,否则称此基态是不稳定的。

其中,范数的定义为: $\|f\| \equiv \int_{G+} f^2 dx_1 dx_2$, f 为 x_1, x_2, t 的任意函数。

b. 基态的特征矩阵、特征方程及特征值

1) 基态的特征矩阵 $\bar{A}$ 的定义:

$$\equiv (\bar{a}_{ij})_{3 \times 3} \equiv \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2 \bar{p}} x_2^- + \frac{M_1}{x_2} M_0 x_2 \bar{M} & \frac{1}{x_2 \bar{p}} x_1^- + \frac{M_1}{x_2} M_0 x_1 \bar{M} & x_2 \bar{p} \\ \frac{1}{x_1 \bar{p}} x_2^- + \frac{M_1}{x_1} M_0 x_2 \bar{M} & \frac{1}{x_1 \bar{p}} x_1^- + \frac{M_1}{x_1} M_0 x_1 \bar{M} & x_1 \bar{p} \\ x_2 \bar{p} & x_1 \bar{p} & k \bar{p} \end{pmatrix}$$

(2)

其中: $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ji}$, $\bar{a}_{ij}$ 为 $\bar{a}_{ij}(x_1, x_2)$ 的缩写, $\bar{a}_{ij}$ 为域 $G + \partial G$ 上的 $C^{(1)}$ 类有界函数,显然 $\bar{A}$ 为

实对称矩阵。

2) 特征方程及特征值:

特征方程:
$$-I = 0 \quad (3)$$

其中, I 为单位方阵, 为方阵 的特征值, 为 (x_1, x_2) 的缩写, 由于 为实对称方阵, 故方程 (3) 有 3 个实根, 记为: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 且设: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ 。

定义:
$$\begin{cases} \min(x_1, x_2) \equiv \min[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \equiv \lambda_1 \\ \min(G) \equiv \min[\min(x_1, x_2) | (x_1, x_2) \in G +] \end{cases} \quad (4)$$

由上式可知, $\min(x_1, x_2)$ 为特征方程 (3) 在 (x_1, x_2) 点的最小特征值, $\min(G)$ 为特征方程 (3) 在域 $G +$ 中的最小特征值。

c. 基本二次型的定义及其标准形式:

定义:
$$(U_1, U_2, U_3) \equiv (W, V, x_1V + x_2W) \quad (5)$$

1) 基本二次型的定义:
$$F(U_1, U_2, U_3) \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 r_{ij} U_i U_j \quad (6)$$

由式 (5) 可知上式中只有两个独立变量, 即: U_1, U_2 , 故 $F(U_1, U_2, U_3)$ 可记为: $F(U_1, U_2)$ 。

2) 基本二次型的标准形式:

由实二次型理论可知: 存在一个正交变换

$$U_i = \sum_{j=1}^3 r'_{ij} V_j, \quad V_i = \sum_{j=1}^3 r_{ij} U_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6a)$$

其中: $R \equiv (r_{ij})_{3 \times 3}, R^{-1} \equiv (r'_{ij})_{3 \times 3}, RR^{-1} = I, I$ 为单位方阵, R, R^{-1} 为正交方阵, 使得基本二次型式 (6) 在式 (6a) 的正交变换下可写成以下标准形式:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i V_i^2 \quad (6b)$$

其中: λ_i 为特征方程 (3) 的本征值。

d. 常用符号的定义:

定义 1: ${}_0^0 f \equiv f, \quad {}_t^{-1} f \equiv \iint f dt \quad (\text{其中: } f \text{ 为 } x_1, x_2, t \text{ 的任意函数}) \quad (7)$

定义 2: $J_m(t) \equiv \int_{G+} \frac{1}{2h} [({}_t^m U_1)^2 + h_1^2 ({}_t^m U_2)^2] dx_1 dx_2 > 0 \quad (m = -1, 0, 1) \quad (8)$

定义 3: $L_m(t) \equiv \int_{G+} \frac{1}{2} [\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 r_{ij} {}_t^m U_i {}_t^m U_j] dx_1 dx_2 \quad (m = -1, 0, 1) \quad (9)$

显然有: $L_m(t) \equiv \int_{G+} \frac{1}{2} [\sum_{i=1}^3 \lambda_i ({}_t^m V_i)^2] dx_1 dx_2 \quad (m = -1, 0, 1) \quad (9a)$

定义 4: $\mathcal{Q} \equiv \int U_i dt, \quad \mathcal{V} \equiv \int V_i dt \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$

2.3 基本关系式

在这一小节中, 将由式 (1) — (1e) 导出几个基态稳定性分析中非常有用的关系式。

对式 (1) 中第 2, 3 两式求导 ${}_t$, 然后, 将式 (1) 中的第 1, 4, 5 式代入其中得:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{11}^2 {}_u V = \frac{h}{x_1} \left[\frac{1}{h} (V \quad \bar{p} + k\bar{p} \quad V) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{x_1} \bar{p} \quad ({}^{-}V) - M_{1x_1} M_0 V \quad \bar{M} \right] \\ {}_u W = \frac{h}{x_2} \left[\frac{1}{h} (V \quad \bar{p} + k\bar{p} \quad V) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{x_2} \bar{p} \quad ({}^{-}V) - M_{1x_2} M_0 V \quad \bar{M} \right] \end{array} \right. \quad (11a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{11}^2 {}_u V = \frac{h}{x_1} \left[\frac{1}{h} (V \quad \bar{p} + k\bar{p} \quad V) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{x_1} \bar{p} \quad ({}^{-}V) - M_{1x_1} M_0 V \quad \bar{M} \right] \\ {}_u W = \frac{h}{x_2} \left[\frac{1}{h} (V \quad \bar{p} + k\bar{p} \quad V) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{x_2} \bar{p} \quad ({}^{-}V) - M_{1x_2} M_0 V \quad \bar{M} \right] \end{array} \right. \quad (11b)$$

设:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 \equiv h_{11}^2 {}_t V|_{t=0}, \quad A_1 \equiv {}_t W|_{t=0} \\ \mathcal{V} \equiv \int_0 V dt, \quad \mathcal{W} \equiv \int_0 W dt, \quad \mathcal{V}' \equiv \int_0 V' dt \end{array} \right. \quad (12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 \equiv h_{11}^2 {}_t V|_{t=0}, \quad A_1 \equiv {}_t W|_{t=0} \\ \mathcal{V} \equiv \int_0 V dt, \quad \mathcal{W} \equiv \int_0 W dt, \quad \mathcal{V}' \equiv \int_0 V' dt \end{array} \right. \quad (12b)$$

由式(1)及式(1b)可知 A_1, A_2 为连续有界函数。

对式(11a)和(11b)两式求积分 $\int_0^t (\quad) dt$, 经过简单的推导可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{11}^2 {}_u \mathcal{V}' - A_2 = \frac{h}{x_1} \left[\frac{1}{h} (\mathcal{V}' \quad \bar{p} + k\bar{p} \quad \mathcal{V}') \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{x_1} \bar{p} \quad ({}^{-}\mathcal{V}') - M_{1x_1} M_0 \mathcal{V}' \quad \bar{M} \right] \\ {}_u \mathcal{W}' - A_1 = \frac{h}{x_2} \left[\frac{1}{h} (\mathcal{V}' \quad \bar{p} + k\bar{p} \quad \mathcal{V}') \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{x_2} \bar{p} \quad ({}^{-}\mathcal{V}') - M_{1x_2} M_0 \mathcal{V}' \quad \bar{M} \right] \end{array} \right. \quad (13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{11}^2 {}_u \mathcal{V}' - A_2 = \frac{h}{x_1} \left[\frac{1}{h} (\mathcal{V}' \quad \bar{p} + k\bar{p} \quad \mathcal{V}') \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{x_1} \bar{p} \quad ({}^{-}\mathcal{V}') - M_{1x_1} M_0 \mathcal{V}' \quad \bar{M} \right] \\ {}_u \mathcal{W}' - A_1 = \frac{h}{x_2} \left[\frac{1}{h} (\mathcal{V}' \quad \bar{p} + k\bar{p} \quad \mathcal{V}') \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{x_2} \bar{p} \quad ({}^{-}\mathcal{V}') - M_{1x_2} M_0 \mathcal{V}' \quad \bar{M} \right] \end{array} \right. \quad (13b)$$

由以下运算

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{G_+} [{}_t V \times (11a) + {}_t W \times (11b)] h dx_1 dx_2 \end{array} \right. \quad (14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{G_+} [{}_t \mathcal{V}' \times (13a) + {}_t \mathcal{W}' \times (13b)] h dx_1 dx_2 \end{array} \right. \quad (14b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{G_+} [V \times (11a) + W \times (11b)] h dx_1 dx_2 \end{array} \right. \quad (14c)$$

利用格林公式, 同时考虑到式(1a), (1c), (1e)及(1d), 经过简单地推导可得以下3个重要的关系式:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1(t) + L_0(t) = E_1 \end{array} \right. \quad (15a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_0(t) + L_{-1}(t) - \int_{G_+} [A_1 \mathcal{U} + A_2 \mathcal{U}] dx_1 dx_2 = E_0 \end{array} \right. \quad (15b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} J_0(t) - 2J_1(t) = -2L_0(t) \end{array} \right. \quad (15c)$$

其中: E_1, E_0 为有界的积分常数。

3 基态的稳定性判别定理

在本节中, 将分析并证明本文中的一个核心定理——基态的稳定性判别定理。

基态的稳定性判别定理: 在一个与圆盘同胚的边界为 ∂G 的闭集 $G + \partial G$ 内, 若基态量均为 $C^{(1)}$ 类有界函数, 且 $0 < h_1, h_2 < +\infty$, 则以下结论成立:

I、若 $\min(G) > 0$, 则基态是稳定的;

II、若 $\min(G) < 0$, 则基态是不稳定的。

证明:

a. 结论 I 的证明: 由式(15b)、(9)得:

$$J_0(t) + \frac{1}{2} \int_{G+} \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j - 2h^- \sum_{i=1}^3 A_i \mathcal{U}_i \right] dx_1 dx_2 = E_0 \quad (16)$$

其中: $A_3 = 0$ 。

$$\text{作变换: } \mathcal{U}_i = \mathcal{X}_i + \mathcal{X}_i^0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17)$$

其中: $\mathcal{X}_i^0$ 为 (x_1, x_2) 的函数。

使得式(16)写成以下形式:

$$J_0(t) + \frac{1}{2} \int_{G+} \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} \mathcal{X}_i \mathcal{X}_j \right] dx_1 dx_2 = E'_0 \quad (18)$$

$$\text{故有: } \begin{cases} \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} \mathcal{X}_j^0 = h^- A_i & (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (19a)$$

$$\begin{cases} E'_0 = E_0 - \frac{1}{2} \int_{G+} \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} \mathcal{X}_i^0 \mathcal{X}_j^0 - 2h^- \sum_{i=1}^3 A_i \mathcal{X}_i^0 \right] dx_1 dx_2 \end{cases} \quad (19b)$$

在域 $G + \partial G$ 内, 由于 $\gamma_{ij} \neq 0$, 且 $\gamma_{ij} > 0$ 、 $A_i > 0$ 、 $h^- < +\infty$, 故由式(19a)及(19b)得:

$$\begin{cases} \mathcal{X}_i^0 < +\infty & (i = 1, 2, 3) & (x_1, x_2) \in G + \partial G \end{cases} \quad (20a)$$

$$E'_0 < +\infty \quad (20b)$$

$$\text{设: } \mathcal{Y} = \sum_{j=1}^3 r_{ij} \mathcal{X}_j, \quad \mathcal{X}_i = \sum_{j=1}^3 r'_{ij} \mathcal{Y} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (21)$$

由于 $\gamma_{ij} > 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), 且 $\frac{1}{2h^-}, h_1^2 > 0$, 故由式(18)可得:

$$0 \leq \int_{G+} \left[\frac{1}{2h^-} (U_1^2 + h_1^2 U_2^2) \right] dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_{G+} \left[\sum_{i=1}^3 \gamma_{ii} \mathcal{Y}_i^2 \right] dx_1 dx_2 = E'_0 < +\infty \quad (22)$$

由于 $\gamma_{ij} > 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), 且 $\frac{1}{2h^-}, h_1^2 > 0$, 故由式(22)可知:

$$\text{存在正常数 } K, \text{ 使得 } \|\mathcal{U}_i\|, \|\mathcal{Y}_j\| < K \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3) \quad (23)$$

因 R^{-1} 为正交方阵, $R^{-1} = (r_{ij})_{3 \times 3}$, 故 $r'_{ij} < +\infty$ ($i, j = 1, 2, 3$), 故由式(23)及(21)的第2式可知:

$$\text{存在正常数 } K, \text{ 使得 } \|\mathcal{X}_i\| < K \quad (i = 1, 2, 3) \quad (24)$$

由式(17)、(20a)及(24)可知:

$$\text{存在正常数 } K, \text{ 使得 } \|\mathcal{U}_i\| < K \quad (i = 1, 2, 3) \quad (25)$$

由式(10)及(5)可知: 式(25)可具体写成以下形式:

$$\text{存在正常数 } K, \text{ 使得 } \|\int_0^t W dt\|, \|\int_0^t V dt\|, \|\int_0^t (x_1 V + x_2 W) dt\| < K \quad (25a)$$

由式(1)的第1, 4, 5式和(1b)得:

$$\begin{cases} U = - \int_0^t (V - \bar{M}) dt + U^0 \\ \quad = - \frac{1}{h} \int_0^t (-\nabla) dt + U^0 \\ p = - \frac{1}{h} \int_0^t (V - \bar{p} + k\bar{p} - V) dt + p^0 \end{cases} \quad (26)$$

由于: $\bar{\nabla}, \bar{p}, \bar{M}, U^0, U^0, p^0$ 为 $C^{(1)}$ 类有界函数, 且 $h > 0$, 故由式(25a) 及(26) 可知:

$$\text{存在正常数 } K, \text{ 使得 } \|U\|, \|\bar{\nabla}\|, \|p\| < K \quad (27a)$$

而由式(23) 及(5) 可知:

$$\text{存在正常数 } K, \text{ 使得 } \|V\|, \|W\| < K \quad (27b)$$

由式(27a) 和(27b) 可知结论 I 成立。结论 I 证毕。

b. 结论 II 的证明:

由式(15a) 及(15c) 得:

$$\frac{d^2}{dt^2} J_0(t) = 4J_1(t) - 2E_1 \quad (28)$$

$$\text{由于 } J_1(t) \geq 0, \text{ 故有: } \frac{d^2}{dt^2} J_0(t) \geq -2E_1 \quad (29)$$

稍后将证明: 当 $\min(G) < 0$ 时, 存在某些 $C^{(1)}$ 类有界的初值, 使得以下关系成立:

$$\frac{dJ_0(t)}{dt} \Big|_{t=0} = J_1(0) = 0 \quad (30a)$$

$$L_0(0) = E_1 < 0 \quad (30b)$$

在式(30a) 及(30b) 成立时, 由式(29) 可得:

$$J_0(t) \geq -E_1 t^2 + J_0(0) \geq 0 \quad (t \geq 0) \quad (31)$$

故由式(31) 及(8) 得:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2h} [\bar{U}_1^2 + h^2 \bar{U}_2^2] dx_1 dx_2 = +\infty \quad (32)$$

由于 $\frac{1}{2h} \bar{\nabla}, h^2 > 0$, 故由式(32) 和(5) 可得:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\|V\| + \|W\|) = +\infty \quad (33)$$

故结论 II 成立。

现在证明: 当 $\min(G) < 0$ 时, 存在某些 $C^{(1)}$ 类有界初值使(30a—b) 成立。

1) 先证明式(30a) 成立:

选取 U^0, p^0, U^0 的值, 使得它们满足以下关系:

$$-\frac{h}{x_1} p^0 + \left(\frac{h}{-2} x_1 \bar{p}\right)^0 + (M_1 - x_1 M_0) U^0 = 0 \quad (34a)$$

$$-\frac{h}{x_2} p^0 + \left(\frac{h}{-2} x_2 \bar{p}\right)^0 + (M_1 - x_2 M_0) U^0 = 0 \quad (34b)$$

故由式(1)、(34a) 及(34b) 得:

$$\begin{cases} \bar{U}_1 \Big|_{t=0} = 0 \\ \bar{U}_2 \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

由式(35)及(8)可知此时式(30a)显然成立。

2) 现在证明: 当 $\min(G) < 0$ 时, 存在着 $C^{(1)}$ 类有界初 U_1^0 和 U_2^0 , 它使得以下关系(即: 式(30b))成立:

$$\begin{aligned} L_0(0) &= \int_{G+} \frac{1}{2} F(U_1^0, U_2^0) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{G+} \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} U_i^0 U_j^0 \right] dx_1 dx_2 = E_1 < 0 \end{aligned} \quad (36)$$

设特征方程(3)的3个实特征值的大小排列顺序为: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ 。

由于 $\min(G) < 0$, 故在域 $G+$ 中存在着一个与盘同胚的闭集 $G'+$, 在 $G'+$ 中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的分布必为以下二种情况之一, 即:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lambda_1 < 0, \lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \leq 0 & (x_1, x_2) \in G'+ \\ (2) \quad & \lambda_1 < 0, \lambda_2 \text{ 为实数}, \lambda_3 > 0 & (x_1, x_2) \in G'+ \end{aligned}$$

a. 第(1)种情况下, 显然可使式(30b)成立。

b. 第(2)种情况下, 作如下证明:

设:

$$\begin{cases} U_1^0 = x_1 + X_2 \\ U_2^0 = -x_2 - X_1 \end{cases} \quad (37)$$

其中: x_1, x_2 为域 $G+$ 内的 x_1, x_2 的 $C^{(1)}$ 类有界函数。

将式(37)代入式(6)得:

$$\begin{cases} F(U_1^0, U_2^0) = A(x_1)^2 + 2Bx_1x_2 + C(x_2)^2 + 2Dx_1 + 2Ex_2 + F \\ A = \sum_{i=1}^3 K_{iA}^2, \quad D = \sum_{i=1}^3 K_{iA} i_1 A_{i3}, \quad A_{i1} = -r_{i3}X_1 + r_{i1} \\ B = \sum_{i=1}^3 K_{iA} i_1 A_{i2}, \quad E = \sum_{i=1}^3 K_{iA} i_2 A_{i3}, \quad A_{i2} = r_{i3}X_2 + r_{i2} \\ C = \sum_{i=1}^3 K_{iA}^2, \quad F = \sum_{i=1}^3 K_{iA}^2, \quad A_{i3} = r_{i3}(x_2X_2 - x_1X_1) + (r_{i1}X_2 - r_{i2}X_1) \end{cases} \quad (38)$$

其中: $A, B, C, D, E, F, A_j (j=1, 2, 3)$ 为有界函数。

$$\text{定义: } F(x_1, x_2) \equiv F(x_1 + X_2, -x_2 - X_1) \equiv F(U_1^0, U_2^0) \quad (39)$$

$$\text{定义: } \$ \equiv \$ (X_1, X_2) = B^2 - AC \quad (40)$$

将式(38)中的有关参量代入式(40)得:

$$\begin{aligned} \$ &= -K_{K2}(A_{1A12} - A_{1A22})^2 \\ &\quad - K_{K3}(A_{3A12} - A_{1A32})^2 - K_{K3}(A_{1A22} - A_{1A32})^2 \end{aligned} \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} \$ &= -K_{K2}[(r_1 \wedge r_2) \cdot X]^2 \\ &\quad - K_{K3}[(r_1 \wedge r_3) \cdot X]^2 - K_{K3}[(r_2 \wedge r_3) \cdot X]^2 \end{aligned} \quad (41b)$$

$$\text{其中:} \quad \mathbf{X}_i \equiv (X_1, X_2, 1), \quad \mathbf{r}_i \equiv (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (41c)$$

$$\text{设:} \quad \begin{cases} \mathbf{S}_1 = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = (s_{11}, s_{12}, s_{13}) \\ \mathbf{S}_2 = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_3 = (s_{21}, s_{22}, s_{23}) \\ \mathbf{S}_3 = \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3 = (s_{31}, s_{32}, s_{33}) \end{cases} \quad (42)$$

$$\text{再设:} \quad S = (s_{ij})_{3 \times 3} \quad (43)$$

$$\text{故有:} \quad \mathbb{S} = -\mathbb{K}\mathbb{K}^2(\mathbf{s}^1 \quad \mathbf{X})^2 - \mathbb{K}\mathbb{K}^3(\mathbf{s}^2 \quad \mathbf{X})^2 - \mathbb{K}\mathbb{K}^3(\mathbf{s}^3 \quad \mathbf{X})^2 \quad (44)$$

$$\text{可以证明:} \quad S = R^2 \quad (45)$$

$$\text{由于 } R \text{ 是非奇异方阵, 即: } \hat{u}R \neq 0 \quad (x_1, x_2) \in G + \# \quad (46)$$

$$\text{故由式(45), (46) 得: } \hat{u}S \neq 0 \quad (x_1, x_2) \in G + \# \quad (47)$$

考虑到式(44)和(47), 通过简单的分析可以证明:

当 $K_1 < 0$, $\mathbb{K}$ 为实数, $\mathbb{K} > 0$ ($(x_1, x_2) \in G' + \#'$) 时, 存在有界函数 X_1^0, X_2^0 , 使得以下关系成立:

$$\mathbb{S}(X_1^0, X_2^0) > 0 \quad (x_1, x_2) \in G' + \#' \quad (48)$$

$$\text{定义:} \quad I(7, X_1, X_2) \equiv \int_{G' + \#'} \frac{1}{2} F(7, X_1, X_2) dx_1 dx_2 \quad (49)$$

在以下的讨论中, 设 X_1^0, X_2^0 是具有以下性质 $C^{(1)}$ 类函数, 即

$$\mathbb{S}(X_1^0, X_2^0) > 0 \quad (x_1, x_2) \in G' + \#'$$

可以证明: 在式(49)中, 若取 $X_1 = X_1^0, X_2 = X_2^0$, 则在 $G' + \#'$ 中存在着一组坐标系 (N, G) , 它与坐标系 (x_1, x_2) 之间的变换为非奇异的一一变换, 且坐标系 (N, G) 中式(49)可写成以下形式:

$$\begin{aligned} I(7, X_1^0, X_2^0) = \int_{G' + \#'} [A'((5N)^2 - (5G)^2) \\ + B'_{7 \ 5N7} + C'_{7 \ 5G7} + D'_{7 \ 2}] dN dG \end{aligned} \quad (50)$$

其中: A', B', C', D' 为有界函数, 且在 $G' + \#'$ 中 A' 或处处大于 0, 或处处小于 0。

设 $G'' + \#''$ 为 $G' + \#'$ 的子集, 且 $G'' + \#''$ 具有以下性质:

$$G'' + \#'' = \{(N, G) \mid N_1^0 \leq N \leq N_2^0, G_1^0 \leq G \leq G_2^0\} \quad (51)$$

设:

$$7^0 = \begin{cases} \sin^3(2PmN) \sin^3(2PnG) & (m, n = 1, 2, \dots) \quad (N, G) \in G'' + \#'' \\ 0 & (N, G) \notin G'' + \#'' \end{cases} \quad (52)$$

其中: $\mathbb{S}N = N_2^0 - N_1^0, \mathbb{S}G = G_2^0 - G_1^0$ 。

将式(52)代入式(50)中经过分析和计算得:

$$I(7^0, X_1^0, X_2^0) = a_1 m^2 - a_2 n^2 + b_1 m + b_2 n + b_3 \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (53)$$

$$\text{且:} \quad \begin{cases} a^1 a^2 > 0 \\ 0 < \underline{a} < \underline{a}_i < \bar{a} < +\infty & (i = 1, 2) \\ \underline{b}_j < \bar{b} < +\infty & (j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (53a)$$

其中, $a, \bar{a}, \bar{b}$ 是与 m, n 无关的常数。

由以上分析可知: 只要适当地取 m, n 的值, 总可以使得 $I(7^0, X_1^0, X_2^0) > 0$, 同样, 也可以使得 $I(7^0, X_1^0, X_2^0) < 0$ 。

由此, 可以证明在第(2)种情况下可以使得式(30b)成立。为此, 选取 U_1^0, U_2^0 的取值:

$$\begin{cases} U_1^0 = \begin{cases} 5x_1 7^0 + X_{27}^0 & (x_1, x_2) \in G'' + \#'' \\ 0 & (x_1, x_2) \notin G'' + \#'' \end{cases} \\ U_2^0 = \begin{cases} -5x_2 7^0 - X_{27}^0 & (x_1, x_2) \in G'' + \#'' \\ 0 & (x_1, x_2) \notin G'' + \#'' \end{cases} \end{cases} \quad (54)$$

显然, 由式(54)定义的 U_1^0, U_2^0 为 $C^{(1)}$ 类函数, 并满足边界条件(1c)式。

$$\text{由于: } \int_{G+\#} \frac{1}{2} F(U_1^0, U_1^0) dx_1 dx_2 = \int_{G''+\#''} \frac{1}{2} F(U_1^0, U_1^0) dx_1 dx_2 = I(7^0, X_1^0, X_2^0) \quad (55)$$

故根据以上的讨论结果可知: 当 $K_1 < 0$, K 为实数, $K > 0 ((x_1, x_2) \in G' + \#')$ 时, 可以通过适当地选取 m, n 的取值, 使得式(36) (即: (30b)) 成立。

结论 II 证毕。即基态的稳定性判别定理证毕。

4 稳定性判据的基本性质

由稳定性判别定理可知基态稳定性判据为:

- 1) 当 $K_{\min}(G) > 0$ 时, 基态是稳定的;
- 2) 当 $K_{\min}(G) < 0$ 时, 基态是不稳定的。

称以上判据为基态稳定性判据 I。在以上判据中没有讨论 $K_{\min}(G) = 0$ 时基态的稳定性, 实际上用本文所用的方法很难判定此时基态的稳定性; 称 $K_{\min}(G) = 0$ 时的基态为临界态。

由 $K_{\min}(G)$ 及正定矩阵和半正定矩阵的定义可知: 基态稳定性判据 I 可写成以下等价形式:

- 1) 在域 $G + \#$ 内, 若基态的特征矩阵 + 处处为正定矩阵, 则基态是稳定的;
- 2) 在域 $G + \#$ 内, 若基态的特征矩阵 + 非处处为半正定矩阵, 则基态是不稳定的。

称以上判据为基态稳定性判据 II。

由判据 II 可知: 基态的稳定性是与基态的特征矩阵 + 的正定及半正定性质相联系的; 因此, 可以更多地利用线性代数理论来丰富和充实基态稳定性判别定理的内容, 以加深对其的理解。为此, 直接引入线性代数理论的若干结论^[15], 运用这些结论, 可以把基态稳定性判据写成多种更为实用的等价判据形式。由于篇幅有限, 仅将线性代数中的两个非常有用的定理列出, 而不一一列出由以下两个定理所导出的各种与判据 I 等价的其它判据的形式。人们可根据研究的需要由以下两个定理写出实用的、与判据 I 等价的判据形式。

定理 A^[15]: 设 A 为 n 阶对称矩阵, 于是下列诸命题等价:

- (1) A 为正定矩阵;
- (2) A 的所有特征根 > 0 ;

- (3) A 的所有主子式 > 0 ;
 (4) A 的所有 i 阶主子式之和 $> 0, i = 1, \dots, n$;
 (5) A 的所有的主要主子式 > 0 。

定理 $B^{[15]}$: 设 A 为 n 阶对称矩阵。于是下列诸命题等价:

- (1) A 为半正定矩阵;
 (2) A 的所有特征根 ≥ 0 ;
 (3) A 的所有主子式 ≥ 0 ;
 (4) A 的所有 i 阶主子式之和 $\geq 0, i = 1, \dots, n$ 。

为了应用方便, 写出特征方程(3)的具体形式:

特征方程 $\hat{u} + - K = 0$ 可展开成以下形式:

$$K^3 - a_{1K} K^2 + a_{2K} K - a_3 = 0 \quad (56)$$

其中:

$$\begin{cases} a_1 = +_{11} + +_{22} + +_{33} \\ a_2 = \begin{vmatrix} +_{11} & +_{12} \\ +_{21} & +_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} +_{11} & +_{13} \\ +_{31} & +_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} +_{22} & +_{23} \\ +_{32} & +_{33} \end{vmatrix} \\ a_3 = + \end{cases} \quad (56a)$$

将由式(2)定义的 $+_{ij}$ 的具体形式代入式(56a)得:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{Q} \bar{p} \quad \bar{Q} + \bar{Q} M_1 \quad M_0 \quad \bar{M} + k \bar{p} \\ a_2 = M_1 (\bar{M} \wedge \bar{Q}) (M_0 \wedge \bar{p}) - \frac{k \bar{p}}{H} \bar{p} \quad H + k \bar{p} \bar{Q} M_1 \quad M_0 \quad \bar{M} \\ a_3 = - \frac{k \bar{p} \bar{Q} M_1}{H} (M_0 \wedge \bar{p}) (\bar{M} \wedge \bar{H}) \end{cases} \quad (56b)$$

其中: $H = T \left(\frac{1000}{p} \right) \frac{R}{p}, \bar{p} = R \bar{Q} T, \quad A \quad B = \mathfrak{S}_{1^A 5 x_1 B} + \mathfrak{S}_{2^A 5 x_2 B}, \quad A \wedge \bar{B} = \mathfrak{S}_{1^A 5 x_2 B} - \mathfrak{S}_{2^A 5 x_1 B} \circ$

最后, 由定理 A 及定理 B 给出一种比较实用的基态稳定性判据 III:

- 1) 若在域 $G + \#$ 内, $a_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ 处处成立, 则基态是稳定的;
- 2) 若在域 $G + \#$ 内, $a_i \geq 0 (i = 1, 2, 3)$ 不处处成立, 则基态是不稳定的。

5 结论

本文讨论了可压、绝热、无耗散的二维大气中三类定常基态的稳定问题。严格地证明了: 这三类定常基态的稳定性性质是由基态的特征矩阵 $+$ 的性质决定的:

- a. 若 $+$ 在域 $G + \#$ 内处处为正定矩阵, 则基态是稳定的;
- b. 若 $+$ 在域 $G + \#$ 内非处处为半正定矩阵, 则基态是不稳定的。

以上结论的理论价值在于, 将这三类非均匀基态的对称稳定性判别问题, 最终归结为基态的特征矩阵 $+$ 的本征值的基本性质分析的简单代数问题, 即化为基态的特征矩阵 $+$ 的 3 个本征值性质的判别问题, 具体地说:

(1) 当 $+$ 的 3 个特征值在域 $G + \#$ 中处处大于零(即: $+$ 在 $G + \#$ 中为正定矩阵)时, 基态是稳定的;

(2) 当 $+$ 的 3 个特征值中任何一个在域 $G + \#$ 中某一点小于零(即: $+$ 在 $G + \#$ 中是非处处半正的)时, 基态是不稳定的。

本文所讨论的实用价值在于直角坐标系、柱坐标系和球坐标系中的三类非均匀基态的对称稳定性, 分别对应于三种非常重要的天气系统, 即: 中尺度、台风涡旋和行星环流系统的对称稳定性, 因而, 本文得到的基本结论可以直接用于这三类非常重要的天气系统的对称稳定性分析。

在这三类实际天气系统的对称稳定性分析中, 可以在所研究的区域 $G + \#$ 中通过式 (56b) 计算出 a_1, a_2 及 a_3 , 再根据基态稳定性判据 III 可知:

(1) 在 $G + \#$ 中, 若 a_1, a_2, a_3 中的任何一个在某一点小于零, 则基态是不稳定的;

(2) 在 $G + \#$ 中, 若 a_1, a_2, a_3 都处处大于零, 则基态是稳定的。

参考文献

- [1] Kuo H L. Symmetric disturbances in a thin layer of fluid subject to a horizontal temperature gradient and rotation. J Meteor, 1954, 11: 399– 411.
- [2] Ooyama K. On the stability of baroclinic circular vortex: a sufficient criterion for instability. J Atmos Sci, 1966, 23: 43– 53.
- [3] Hoskins B J. The role of potential vorticity in symmetric stability and instability. Quart J Roy Meteor Soc, 1974, 100: 480– 482.
- [4] Bennetts D A and Hoskins B J. Conditional symmetric instability—a possible explanation for frontal rainbands. Quart J Roy Meteor Soc, 1979, 105: 945– 962.
- [5] Walton I C. The viscous nonlinear symmetric baroclinic instability of a zonal shear flow. J Fluid Mech, 1975, 68: 757– 768.
- [6] Emanuel K A. The Lagrangian parcel dynamics of moist symmetric instability. J Atmos Sci, 1983, 40: 2368– 2376.
- [7] Xu Q. Generalized energetics for linear and nonlinear symmetric instabilities. J Atmos Sci, 1986, 43: 972– 984.
- [8] 穆穆. 大气运动非线性不稳定性研究的若干新进展. 大气科学, 1995, 19(4): 494—509.
- [9] 丁一汇, 沈新勇. 对称不稳定理论及其应用问题 (一) 线性理论. 应用气象学报, 1994, 5: 361—368.
- [10] 丁一汇, 沈新勇. 对称不稳定理论及其应用问题 (二) 非线性理论. 应用气象学报, 1994, 5: 471—476.
- [11] 许秦, 周晓平. 非静力平衡大气中的斜压惯性不稳定. 大气科学, 1982, 6(4): 355—367.
- [12] 张可苏. 斜压气流中尺度稳定性, I、对称不稳定. 气象学报, 1988, 46(3): 258—266.
- [13] Xu Q. Conditional symmetric instability and mesoscale rainbands. Quart J Roy Meteor Soc, 1986, 112, 315– 334.
- [14] 周江兴, 丁一汇, 刘益民. 二维大气中定常广义地转流的稳定性分析. 气象学报, 1997, 55(2): 131—145.
- [15] 谢帮杰. 线性代数. 人民教育出版社, 1978. 144—146.

THE STABILITY OF THREE CLASSES OF STEADY GROUND-STATE IN THE TWO-DIMENSIONAL ATMOSPHER

Zhou Jiangxing Ding Yihui Liu Yinmin

(*N ational climate center, Beij ing, 100081*)

Abstract

In this paper, discussing the stability of three classes of steady groundstate in the two-dimensional compressible adiabatic and non-dispersive atmosphere , it is exactly demonstrated that the stability of these groundstates is decided by their engine matrix + :

- a. the groundstates are stable if + is positive definite in set $G + \#$.
- b. the groundstates are unstable if + is negative definite in set $G + \#$.

Key words: Compressible atmosphere, Symmetry stability, Energy integrate method.