南京气象学院学报
一九八一年　第二期

地球自转的δ效应

朱　迅

在旋转的地球上运动着的大气必然具有旋转地球给它带来的一些特有性质。陈久康[1]在讨论球面行星波螺旋结构时曾对球面的δ效应对波的结构的影响作过讨论，指出：由于β效应的牵连涡度平流对东传波列的减速作用随纬度的差异，使北半球的行星波列成为东北—西南向的曳式波。下面我们推广朗($R.R.Long$)[2]和巢纪平等[3]在β平面中对大气KdV波动的研究工作，从另一个角度来说明δ效应(β随纬度的变化)的非线性性质。

原点在地心的球面极坐标(θ、λ)，θ为由北极算起的经向弧角，恒为正；λ为经度，从任一经线算起，向东为正。$v_\theta = a\dfrac{d\theta}{dt}$为经向速度，北风为正；$v_\lambda = a\sin\theta\dfrac{d\lambda}{dt}$为纬向风速，西风为正。则正压位势涡度守恒方程为

$$\frac{\partial\zeta_a}{\partial t} + \frac{v_\theta}{a}\frac{\partial\zeta_a}{\partial\theta} + \frac{v_\lambda}{a\sin\theta}\frac{\partial\zeta_a}{\partial\lambda} = 0 \tag{1}$$

其中

$$\zeta_a = \zeta + f = f + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial(v_\lambda\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda} \tag{2}$$

由于水平散度为零，故可引入流函数ψ

$$v_\theta = -\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \qquad v_\lambda = \frac{\partial\psi}{a\partial\theta} \tag{3}$$

则

$$\zeta = \nabla^2\psi = \frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} \tag{4}$$

方程(1)化为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right] +$$

$$+\frac{\beta}{a\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=0 \tag{5}$$

其中

$$\beta=-\frac{df}{ad\theta}=\frac{2\omega\sin\theta}{a} \tag{6}$$

设基本场是以角速度$\Omega=\Omega(\theta)$绕地轴旋转的气流，将流函数写成

$$\psi=\int_{\theta_1}^{\theta_2}a^2\sin\theta[\Omega(\theta)-c_0]d\theta+\varepsilon\phi(\theta,\lambda,t) \tag{7}$$

c_0是待定常数，相当于扰动的角位相速，$\varepsilon\phi$ 是流函数的扰动部分，$\varepsilon<<1$为小参数。由此方程(5)化为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\Omega-c_0)\frac{\partial}{\partial\lambda}+\varepsilon\left(\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\left[\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\lambda^2}\right]+\frac{1}{a\sin\theta}\left\{\beta-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\!\left[\frac{1}{a^2\sin\theta}\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\frac{\partial}{\partial\theta}[a^2\sin^2\theta(\Omega-c_0)]\right]\!\right]\right\}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=0 \tag{8}$$

采用讨论非线性长波近似中的坐标延伸法，令

$$\Lambda=\varepsilon^{1/2}\lambda,\qquad \tau=\varepsilon^{3/2}t \tag{9}$$

而

$$\phi(\theta,\lambda,t)=\phi^{(1)}(\theta,\Lambda,\tau)+\varepsilon\phi^{(2)}(\theta,\Lambda,\tau)+\cdots\cdots \tag{10}$$

上述结果代入(8)式，比较ε的同次幂项，可得$\varepsilon^{1/2}$的方程为

$$\mathbf{L}\,\phi^{(1)}=0 \tag{11}$$

其中算子$\mathbf{L}$定义为

$$\mathbf{L}=\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\Lambda}\left[\!\left[\frac{\Omega-c_0}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(1-\frac{c_0}{\omega}\right)\beta-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta\,\Omega)\right]\right]\!\right] \tag{12}$$

设在边界上扰动为零，即有边界条件

$$\theta=\theta_1,\theta_2\ \text{时},\quad \phi^{(1)}=\phi^{(2)}=\cdots=0 \tag{13}$$

则由(12)式及(13)式可假定$\phi^{(1)}$是可分离变量的。设

$$\phi^{(1)}=F(\Lambda,\tau)G(\theta) \tag{14}$$

于是 $G(\theta)$ 满足的方程和边界条件为

$$\frac{\Omega-c_0}{a}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dG}{d\theta}\right)+\left[\left(1-\frac{c_0}{\omega}\right)\beta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\,\Omega)\right]\right]G=0 \tag{15}$$

$$G(\theta_1)=G(\theta_2)=0 \tag{16}$$

又 $\varepsilon^{3/2}$ 的方程为

$$\mathrm{L}\phi^{(2)}+\left[\frac{\partial}{\partial\tau}+\left(\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\Lambda}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\Lambda}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\left[\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\theta}\right)\right]+$$

$$+(\Omega-c_0)\frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^3\phi^{(1)}}{\partial\Lambda^3}=0 \tag{17}$$

以 $\frac{aG\sin\theta}{\Omega-c_0}$ 乘(17)式，再从 θ_1 到 θ_2 对 θ 积分，则由(13)．(15)及(16)式得积分后式子的第一部分为零

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{aG\sin\theta}{\Omega-c_0}\mathrm{L}\phi^{(2)}d\theta=0 \tag{18}$$

而式子的其余部分为

$$F_\tau-RFF_\Lambda-SF_{\Lambda\Lambda\Lambda}=0 \tag{19}$$

其中

$$R=I_2/I_1\qquad S=I_3/I_1 \tag{20}$$

$$I_1=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{G^2}{(\Omega-c_0)^2}\left[\left(1-\frac{c_0}{\omega}\right)\beta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\,\Omega)\right]\right]d\theta \tag{21}$$

$$I_2=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{G^3}{a^2(\Omega-c_0)}\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta(\Omega-c_0)}\left[\left(1-\frac{c_0}{\omega}\right)\beta-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{a}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\Omega)\right]\right]\right\}d\theta \tag{22}$$

$$I_3=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{G^2}{a\sin\theta}d\theta \tag{23}$$

方程(19)就是在球坐标系中考虑了地球自转效应以后的 KdV 方程，它描述了一类弱非线性的频散波动，这类波的传播速度与波幅有关。

给定了基本气流 $\Omega=\Omega(\theta)$ 之后，就可以由(15)式和(16)式确定本征值 c_0 和相应的本征函数 G，从而求出 R 和 S，进而可讨论方程(19)的行波解。这里我们考虑

$$\Omega = \Omega_0 = \text{常数} \tag{24}$$

的情形。注意到使用的坐标系之后与朗和巢纪平等的处理比较，这也相当于一广义的线性切变基流，它位于西风急流之北侧。此时若先注意(22)、(6)和(16)式，则有

$$I_2 = -\frac{2(\omega+\Omega_0-c_0)}{a^3(\Omega_0-c_0)^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} dG^3 = 0 \tag{25}$$

于是方程(19)转化成线性的频散方程

$$F_\tau - SF_{AAA} = 0 \tag{26}$$

到此看出，在我们讨论的问题中，若不采用 β 平面近似，而是精确地考虑 β 变量，则对于球形旋转正压大气(24)式所确定的基本气流，描述有限振幅扰动的非线性频散相互作用的 KdV 方程(19)转化为线性频散方程(26)。如果象通常处理问题那样采用 β 平面近似，即考虑 $\beta=$常数的情形，这时 KdV 方程(19)中的非线性项就不为零。故可这么认为：在旋转球面正压大气中，若基本气流是满足(24)式的绕极轴旋转的经向切变流，则由于这种基本切变流而产生的非线性效应恰恰与 β 随纬度变化的 δ 效应相平衡而抵消，从而使得描述切变基本流中扰动的 KdV 方程转化为线性方程。故从这个意义上来说，δ 效应也相当于一种非线性效应。

下面来考虑方程(26)的行波解。此时方程(15)即化为勒让德($A.M.Legendre$)方程

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{dG}{d\theta}\right)+\frac{2}{\Omega_0-c_0}(\omega+\Omega_0-c_0)G = 0 \tag{27}$$

其通解为

$$G(cos\theta) = c_1 P_\nu(cos\theta) + c_2 Q_\nu(cos\theta) \tag{28}$$

其中的 ν 由

$$\frac{2}{\Omega_0-c_0}(\omega+\Omega_0-c_0) = \nu(\nu+1) \tag{29}$$

决定。事实上我们只要取(29)式关于 ν 的一个根就可以了。譬如取

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{2\omega}{\Omega_0-c_0}} - \frac{1}{2} \tag{30}$$

由边界条件(16)得到联系特征值 c_0 的关系

$$P_\nu(cos\theta_1)Q_\nu(cos\theta_2)-P_\nu(cos\theta_2)Q_\nu(cos\theta_1) = 0 \tag{31}$$

当特征值 c_0 确定后，利用关系

$$c_1/c_2 = -Q_\nu(cos\theta_1)/P_\nu(cos\theta_1) = -Q_\nu(cos\theta_2)/P_\nu(cos\theta_2) \tag{32}$$

可确定G的一个常数，再注意到余下的另一个常数对S是没有影响的，至此我们已求出了S，下面来求S的近似表达式。

从ν的表达式(30)可以看出，对于大气中的扰动来说($0<\Omega-c_0<<\omega$)，ν的值一般是很大的(在下面推导中,也可以证实这一点)，所以可以将$P_\nu(cos\theta)$和$Q_\nu(cos\theta)$进行展开，且只取其渐近展开的主项，从而有

$$P_\nu(cos\theta) \doteq \left(\frac{2}{\pi sin\theta}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right] \quad (33)$$

$$Q_\nu(cos\theta) \doteq \left(\frac{\pi}{2\,sin\theta}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right] \quad (34)$$

此时(31)式为

$$sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta_2-\theta_1)\right]=0 \quad (35)$$

于是

$$\nu=\frac{n\pi}{\theta_2-\theta_1}-\frac{1}{2} \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots \quad (36)$$

我们取$n=1$(对于近20个纬度宽度的基本气流来说$\nu\sim10$，从而说明渐近展开是可行的)，由(30)式及(36)式得

$$c_0=\Omega_0-\frac{2\omega}{\frac{n^2\pi^2}{(\theta_2-\theta_1)^2}-\frac{9}{4}} \quad (37)$$

渐近展开(32)式主项成为

$$c_1/c_2=-\frac{\pi}{2}cot\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta_2+\frac{1}{4}\pi\right] \quad (38)$$

此时相应的特征函数为

$$G=\tilde{c}\,(sin\theta)^{-\frac{1}{2}} sin\left(\frac{\theta_2-\theta}{\theta_2-\theta_1}n\pi\right) \quad (39)$$

其中$\tilde{c}$为任一常数，并利用了(36)式。这样可求得I_1和I_3为

$$I_1=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\frac{\tilde{c}^2}{sin\theta}sin^2\left(\frac{\theta_2-\theta}{\theta_2-\theta_1}n\pi\right)\right]\frac{2(\omega+\Omega_0-c_0)sin\theta}{a(\Omega_0-c_0)^2}d\theta$$

$$=\frac{2\tilde{c}^2}{a(\Omega_0-c_0)^2}(\omega+\Omega_0-c_0)(\theta_2-\theta_1) \quad (40)$$

$$I_3=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\tilde{c}^2}{asin^2\theta}sin^2\left(\frac{\theta_2-\theta}{\theta_2-\theta_1}n\pi\right)d\theta \doteq \frac{\tilde{c}^2}{asin^2\bar{\theta}}(\theta_2-\theta_1) \quad (41)$$

其中 $\overline{\theta} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$，(41)式的计算中用了中值公式，并作了些近似，从而

$$S = \frac{2\omega}{sin^2\overline{\theta}}\left[\frac{n^2\pi^2}{(\theta_2-\theta_1)^2} - \frac{9}{4}\right]^{-1}\left[\frac{n^2\pi^2}{(\theta_2-\theta_1)^2} - \frac{1}{4}\right]^{-1} \tag{42}$$

方程(26)回到 λ、t 坐标则为

$$F_t - SF_{\lambda\lambda\lambda} = 0 \tag{43}$$

设(43)式具有波型解 $F=exp[ik(\lambda-c't)]$，则其相速为

$$c' = Sk^2 \tag{44}$$

注意这里的 k 是全球波数。因为波动是叠加在角相速度为 c_0 的扰动上的，故实际上的角相速度应为 c_0+c'，利用(44)式、(37)式和(42)式可得波角相速

$$c_0+c'=\Omega_0 - \frac{2\omega}{\frac{n^2\pi^2}{(\theta_2-\theta_1)^2} - \frac{9}{4}} + $$

$$+ \frac{2\omega}{sin^2\overline{\theta}}\left[\frac{n^2\pi^2}{(\theta_2-\theta_1)^2} - \frac{9}{4}\right]^{-1}\left[\frac{n^2\pi^2}{(\theta_2-\theta_1)^2} - \frac{1}{4}\right]^{-1} k^2 \tag{45}$$

如果我们考虑大气中常见的 $(\theta_2-\theta_1) < 1$ 范围内的波动、并且 $n = 1$ 的情形，即南北方向只有半个波形，则(45)式的近似表达式为

$$c_0+c' \doteq \Omega_0 - \frac{2\omega(\theta_2-\theta_1)^2}{\pi^2} + \frac{2\omega(\theta_2-\theta_1)^4}{sin^2\overline{\theta}\,\pi^4} k^2 \tag{46}$$

我们把它与有限扰动宽度 D 的罗斯贝 ($C.G.Rossby$) 波的相速公式相比较

$$c = U - \frac{\beta}{\pi^2\left(\frac{4}{L^2} + \frac{1}{D^2}\right)} \doteq U - D^2\left(1 - \frac{4D^2}{L^2}\right)\frac{\beta}{\pi^2} \tag{47}$$

这里 L 是实际波长，在后面的近似号中，作了扰动宽度小于波长的假设。上式两边除以 $asin\overline{\theta}$，注意到 $D \doteq a(\theta_2-\theta_1)$，$L \doteq \frac{2\pi asin\overline{\theta}}{k}$，便知换成角速度的近似表达式与(46)式完全相同。

所以，考虑 δ 效应后 KdV 方程中非线性项系数为零转化成的线性方程描述了有限扰动宽度的罗斯贝长波。在高纬度的西风急流北侧（尤其是极圈附近），存在着明显的气旋性风速切变。按上述的讨论可知，此时，这类线性切变流动中的扰动仍具有线性地向东传播的特性，波速公式与经典的均匀西风或急流轴上（切变为零）采用 β 平面近似所得的罗斯贝波动相速公式相一致。

参 考 文 献

[1] 陈久康，正压大气球面行星波结构变化的机制，气象科学，1980，1、2。

[2] R.R.Long, Solitary Waves in the Westerlies, J.Atmos. Sci., Vol. 21, pp. 197—200, 1964.

[3] 巢纪平等，旋转正压大气中的椭圆余弦波，中国科学，1980，7。