

一个双波地形重力波拖曳参数化方案^{* 1}

王 元 唐锦贇 伍荣生

南京大学大气科学系, 中尺度灾害性天气教育部重点实验室, 南京, 210093

摘 要

当地形次尺度强迫的作用与显式的经典动力作用效应相当时, 地形重力波拖曳力对于环流的维持, 以及动量和热量通量输送的动力效应变得十分显著。这种地形次尺度拖曳作用项可通过参数化的方法, 在动力方程中加入额外的小项而引入数值模式。目前成熟的地形重力波拖曳参数化方法, 如第 1 代基于线性单波理论参数化方案; 以及侧重考虑了临界层作用等因素对拖曳力的额外贡献的第 2 代参数化方案, 都无法有效表达风速垂直变化引起的波动应力随高度变化的特征。基于上述考虑, 本文给出了一个双波参数化方案用于计算地形重力波拖曳中由线性自由传播重力波造成的波动应力的垂直分布。通过二阶 WKB 近似, 它对由风速垂直变化引起的对波动应力的选择性临界层吸收过程和经典的临界层吸收过程做了显式处理; 而在不发生临界层吸收现象的地区, 则用两个单波同时在垂直方向上进行应力的传播, 并利用波饱和标准进行应力耗散。进一步地在真实地形(以大别山区为个例)条件下的测试结果表明, 通过在不同理想风速廓线以及北半球冬季中纬度纬向平均风廓线下对波动应力垂直分布的计算, 证明该方案确实能有效地给出应力随高度变化的特征。

关键词: 地形重力波拖曳, 双波参数化方案, 临界层吸收, WKB 近似。

1 引 言

次网格地形触发的重力波拖曳(Orographic Gravity Wave Drag, OGWD)对维持大气环流的动量、能量守恒过程具有非常重要的作用^[1], 因此在过去的几十年中, 人们先后发展了第 1 代和第 2 代 OGWD 参数化方案^[2]来改善大尺度数值模式(特别是全球模式)的模拟结果。各种实验证明, 无论是第 1 代还是第 2 代 OGWD 参数化方案, 它们都能相当有效地缓解因大尺度数值模式不能精确分辨次网格地形而造成的“西风偏差(Westerly bias)”和“冷极(Cold pole)”问题^[1,3]。

在各种不同的 OGWD 参数化方案中^[1,3-8], 对自由传播的线性地形重力波造成的重力波拖曳的处理占有非常重要的地位。大多数的方案都假定, 由次网格地形触发的自由传播重力波携带的波动应力(即 OGWD)将以单波的形式遵照 Eliassen-Palm 通量定理^[9], 即以不变的数值从一个高度传播到另一

个高度; 如果在某个高度, 单波振幅满足波饱和标准(则波破碎过程发生)^[10], 那么在该处波动应力将发生垂直辐散, 并对基本流产生反向于局地风速的加速度; 如果在某个高度基本流的风速为零, 那么波动应力将在该处被完全吸收, 并因此产生对基本流的动量的修正。尽管单波方案被证明能够相对有效地模拟出波动应力的垂直分布特征, 但是 Smith^[11], Hines^[12], Shutts^[13]等先后指出, 波动能量(应力)在空间中的分布具有双枝结构; 并且 Shutts^[13-14]还指出, 选择性临界层吸收(事实上, 若考虑连续的重力波波谱, 次网格地形触发的重力波波谱正是属于这样的情况, 由于每个单波拥有的不同的多普勒频率将在不同的高度满足零数值条件, 即临界层条件, 所以它们将在不同的高度被有选择地吸收)将使得波动应力矢量偏离于局地的风矢量方向(从而单波方案中采用的波动应力矢量始终与局地风速矢量在同一直线上的假定将不再成立)。Scinocca 和 McFarlane^[3]采用了 Hines^[12]的建议, 设计了一个双波

* 初稿时间: 2007 年 6 月 17 日; 修改稿时间: 2007 年 7 月 20 日。

资助课题: 国家自然科学基金项目(40575017), 国家重点基础研究发展规划项目(973: 2004CB418301), 博士点专项科研基金(2005028035)。

作者简介: 王元, 从事天气动力学方面的研究。E-mail: yuanasm@nju.edu.cn

方案来模拟波动应力的垂直分布特征,实验证明,这种处理比单波方案能给出更符合实际的结果。但是,Scinocca 和 McFarlane^[3]的双波方案并没有对选择性临界层吸收过程进行显式处理,所以他们的方案中两个单波携带的应力的夹角(在地表高度上)一经确定就不随高度变化,这与 Shutts^[13]的发现显然不符。高守亭、冉令坤^[15]则从针对 McFarlane 参数化方案没有考虑重力波破碎耗散作用入手,从理论上表达了考虑耗散作用影响的重力波破碎拖曳参数化改进方案。

基于以上的考虑,本文则给出了一个能够显示处理经典的临界层(即零风速高度)吸收、选择性临界层吸收以及波饱和造成的波破碎过程的双波重力波拖曳参数化方案。

2 方案的构造

对附录 A 中的式(A₇)—(A₁₁)施用二维傅立叶变换,则通过运算之后可以求得

$$\hat{U}_H = i \frac{(\cos\varphi, \sin\varphi)}{K} \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + i \frac{\hat{w}(\sin\varphi, -\cos\varphi)}{K} \cdot \frac{(U_z \sin\varphi - V_z \cos\varphi)}{U_n} - i \frac{\Gamma_1}{K} (\cos\varphi, \sin\varphi) \hat{w} \quad (1)$$

其中 $U_n = U \cos\varphi + V \sin\varphi = U_g \cos(\varphi - \chi)$, 并引用了定义 $\mathbf{U} \equiv U_g (\cos\chi, \sin\chi)$ 和 $\mathbf{K} \equiv K (\cos\varphi, \sin\varphi)$ 及虚数单位 $i = \sqrt{-1}$ 。

由式(1)可以得到单位面积波动应力 τ_s 的表达式为

$$\begin{aligned} \tau_s = & -\frac{1}{XY} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \overline{U_H \hat{w}'} dx dy = \\ & -\frac{\rho_0}{4\pi^2 XY} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{U}_H \hat{w}^* K dK d\varphi = \\ & -\frac{\rho_0}{4\pi^2 XY} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} i (\cos\varphi, \sin\varphi) \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \hat{w}^* dK d\varphi = \\ & -\frac{\rho_0}{4\pi^2 XY} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} i (\cos\varphi, \sin\varphi) \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \hat{w}^* - \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial z} \hat{w} \right) dK d\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

其中 X, Y 分别为所定义区域的长和宽。定义响应函数(response function)

$$R(K, \varphi) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2i |\hat{w}(K, \varphi, 0)|^2} \cdot \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \hat{w}^* - \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial z} \hat{w} \right) \right\} \quad (3)$$

其中 $\text{Re}(\cdot)$ 表示取变量的实部。且注意到,对本文关注的理想流体(在临界层和波饱和区以外),成立 $E-P$ 通量定理 $d\tau_s/dz=0$, 则可知(在临界层和波饱和区以外) $R(K, \varphi)$ 不随高度变化。

于是,把式(3)代入式(2),并引用下边界条件 $\hat{w}(0) = i \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \hat{h}(k, l)$, 其中

$$\hat{h} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy \quad (4)$$

为地形函数 $h(x, y)$ 的二维傅立叶变换,有

$$\tau_s = 2\rho_0 U_g(0)^2 \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi, \sin\varphi) \cos^2(\varphi - \chi(0)) \cdot K^2 R(K, \varphi) A(K, \varphi) dK d\varphi \quad (5)$$

其中

$$K \cdot A = \frac{K |\hat{h}|^2}{4\pi^2 XY} = A_1(K) A_2(\varphi) = \left(\frac{K}{K_0} \right)^\gamma \left[\frac{1}{2\pi} (C_1 + C_2 \cos 2\varphi + C_3 \sin 2\varphi) \right] \quad (6)$$

为指数定律形式的地形能谱函数^[13], 其中 K_0 为波数参量, 本文取 1 km^{-1} 。进一步引入地形标准化方差的定义^[6]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^2 = & \frac{1}{XY} \int_0^{XY} \int_0^{XY} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 dx dy = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(K, \varphi) K^3 \cos^2 \varphi dK d\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

则有

$$\sigma_{xx}^2 = \frac{(C_1 + C_2/2)}{2(\gamma + 3) K_0^\gamma} (K_U^{\gamma+3} - K_L^{\gamma+3}) \quad (8)$$

同理,有

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{C_3}{4(\gamma + 3) K_0^\gamma} (K_U^{\gamma+3} - K_L^{\gamma+3}) \quad (9)$$

$$\sigma_{yy}^2 = \frac{(C_1 - C_2/2)}{2(\gamma + 3) K_0^\gamma} (K_U^{\gamma+3} - K_L^{\gamma+3}) \quad (10)$$

这里我们引入了 $K_U \leq 2\pi N(0)/U_g(0)$ 和 $K_L \geq 2\pi f/U_g(0)$ (其中 f 为科氏参数) 来限制参数化方案中所考虑的地形波数。事实上,在数值模式中, K_U 和 K_L 分别代表了需要参数化的次网格地形模态的上限和下限。

考虑到贡献 OGWD 的自由传播重力波分量基本上都满足静力平衡条件^[16], 则利用附录 B 中的式(B₃)—(B₅), 可有

$$R(K, \varphi) = \frac{N}{U_n} \left[1 - \frac{\Gamma_1 U_n}{N} \frac{U_{nz}}{N} - \frac{1}{4} \frac{U_n U_{nzz}}{N^2} - \frac{1}{8} \frac{U_{nz}^2}{N^2} - \right]$$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{\Gamma_1 U_n}{N} \right)^2 \times \left(\frac{U_{mz}}{N} \right)^2 \Big] = B \frac{N}{U_n} \quad (11)$$

又方括号中与 $(\Gamma_1 U_n/N)^2$ 相乘的项通常较其他项小很多,于是还有

$$B \approx 1 - \left(\frac{\Gamma_1 U_n}{N} \frac{U_{mz}}{N} + \frac{1}{4} \frac{U_n U_{mz}}{N^2} + \frac{1}{8} \frac{U_{mz}^2}{N^2} \right) \quad (12)$$

再考虑到 $R(K, \varphi)$ 不随高度变化,则有 $R = B_0 N(0)/U_n(0)$, 其中 B_0 为 B 在高度 $z=0$ 的值。

2.1 OGWD 的垂直耗散

Shutts^[13] 曾证明,当背景风矢量随高度变化时,垂直于风矢量方向的波动分量所携带的应力将被基本流吸收,于是,在此情况下, τ_s 在垂直方向上将必然产生辐散。

因此,考虑如图 1 所示的某个 z 平面:由于在直线 $\Phi_L = \min_{0,z} \{\chi^* - \pi/2\}$ 和 $\Phi_U = \max_{0,z} \{\chi^* - \pi/2\}$ 之间的波动分量在 z 高度以下已经被基本气流滤去,其中

$$\chi^* = \begin{cases} \chi & |\chi| \leq \pi/2 \\ \chi - \text{sgn}(\chi)\pi & \pi/2 < |\chi| \leq \pi \end{cases}$$

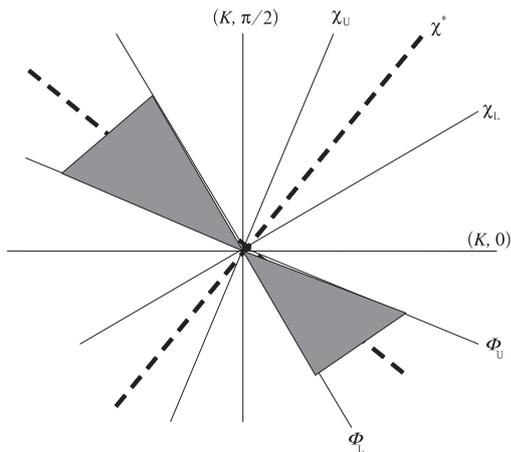


图 1 选择性临界层吸收示意图

(其中 χ_U, χ_L 为风矢量到达 z 高度之前划过的最大和最小的辐角,于是对应的由 Φ_U, Φ_L 所夹的黑色区域波动分量被基本气流完全吸收,仿 Shutts^[13] 的 Fig. 2 绘制)

Fig. 1 A schematic show of the selective critical level absorption

(where χ_U and χ_L are the maximum and minimum arguments that the wind vector had rotated over before reaching level z . This means that the wave components inside the blackened region circumscribed by Φ_U and Φ_L have been filtered off by the ambient flow below level; This figure is drawn following the Fig. 2 in Shutts^[13])

所以仅仅需要考虑 $\Phi_U \leq \varphi \leq \Phi_L + \pi$ 中的波动分量即可,于是可以定义

$$\tau_s = T \int_{\Phi_U}^{\Phi_L + \pi} (\cos \varphi, \sin \varphi) B_0 \cos(\varphi - \chi(0)) A_2(\varphi) d\varphi = TE(\chi(0)) \cdot \int_{\Phi_U}^{\Phi_L + \pi} f(\varphi) d\varphi \quad (13)$$

其中

$$T = \frac{(\gamma + 3) K_0^\gamma}{K_U^{\gamma+3} - K_L^{\gamma+3}} \left[\rho_0 N(0) U_g(0) \int_{K_L}^{K_U} K^2 A_1(K) dK \right] = \rho_0 N(0) U_g(0) \left[\frac{\gamma + 2}{\gamma + 3} \frac{K_U^{\gamma+3} - K_L^{\gamma+3}}{K_U^{\gamma+2} - K_L^{\gamma+2}} \right]^{-1} = \rho_0 N(0) U_g(0) \kappa^{-1} \quad (14)$$

$E(\chi)$ 的定义参见附录 C, 其中 κ 为一个波数参数(关于确定 κ 的方法,可参见文献[6, 16])。根据示意图 2

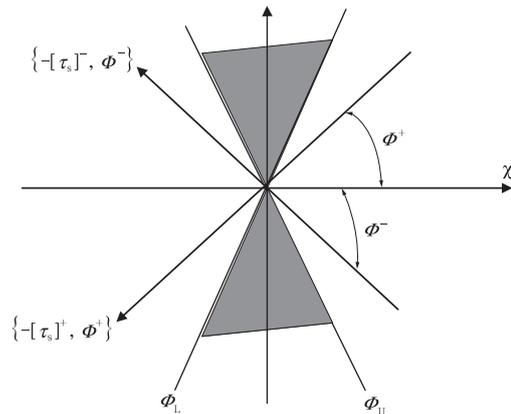


图 2 某一 z 高度的双波分布示意
(χ 为该所在高度基本流的风向)

Fig. 2 A schematic show for the two-wave approximation at level z

(where χ is the wind direction at that level)

我们若定义

$$\begin{aligned} [\tau_s]^+ &= TE(\chi(0)) \cdot \int_{\Phi_U}^{\chi^*} f(\varphi) d\varphi \\ [\tau_s]^- &= TE(\chi(0)) \cdot \int_{\chi^*}^{\Phi_L + \pi} f(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (15)$$

则 τ_s 的垂直传输可以用分别以 μ^+, μ^- (假定不随高度变化) 为波数的两个单波完成,后者则通过下面的式子定义

$$|[\tau_s]^+| = \frac{1}{2} \bar{\rho}(z) (\mu^+)^2 N(z) U_g(z) \kappa^{-1} |\cos \bar{\Phi}^+| (h_m^+)^2 \quad (16)$$

$$|[\tau_s]^-| = \frac{1}{2} \bar{\rho}(z) (\mu^-)^2 N(z) U_g(z) \kappa^{-1} |\cos \bar{\Phi}^-| (h_m^-)^2$$

$$\Phi^+ = \text{atan2}([\tau_{sy}]^+, [\tau_{sx}]^+)$$

$$\Phi^- = \text{atan2}([\tau_{sy}]^-, [\tau_{sx}]^-) \quad (17)$$

$$\bar{\Phi}^+ = |\Phi^+ - \chi|$$

$$\bar{\Phi}^- = |\Phi^- - \chi|$$

为引入波饱和标准,接着定义两个单波的无量纲振幅为

$$F^+ = \left| \frac{N(z) h_m^+}{U_g(z) \cos \bar{\Phi}^+} \right|$$

$$F^- = \left| \frac{N(z) h_m^-}{U_g(z) \cos \bar{\Phi}^-} \right| \quad (18)$$

于是把式(16)–(18)应用到地表,并考虑条件

$$F^+ = \min\left(\frac{N(0)h_0}{U_g(0)}, F_c\right)$$

$$F^- = \min\left(\frac{N(0)h_0}{U_g(0)}, F_c\right) \quad (19)$$

则可以得到

$$\mu^+ = \left[\frac{2 |[\tau_s]^+(0)| \kappa}{\rho_0 N(0) U_g(0) |\cos \bar{\Phi}^+| (h_m^+(0))^2} \right]^{1/2}$$

$$\mu^- = \left[\frac{2 |[\tau_s]^-(0)| \kappa}{\rho_0 N(0) U_g(0) |\cos \bar{\Phi}^-| (h_m^-(0))^2} \right]^{1/2} \quad (20)$$

$$h_m^+(0) = |\cos \bar{\Phi}^+| \min\left(h_0, \frac{F_c U_g(0)}{N(0)}\right)$$

$$h_m^-(0) = |\cos \bar{\Phi}^-| \min\left(h_0, \frac{F_c U_g(0)}{N(0)}\right)$$

其中 h_0 的定义见附录中的式(C_{10})。

2.2 计算步骤

(1) 利用式(13)计算 $\tau_s(0)$; 令 $\chi^* = \chi^*(0)$, $\Phi_L = \Phi_U = \chi^*(0) - \pi/2$; 用式(20)计算 μ^+ , μ^- ;

(2) 假定第 n 层的 $\tau_s(z_n)$ 已经确定,对 $n+1$ 层进行下述步骤:

如果 $z_{n+1} > z_{\text{top}}$,转到步骤(3); 如果 $\chi(z_{n+1}) = \chi(z_n) + \pi$,则完全临界层吸收发生,令 $\tau_s(z_{n+1}) = 0$,转到步骤(3); 否则执行下面的步骤:

① 计算 $\chi^*(z_{n+1})$ 及

$$\Phi_L = \min\left\{\Phi_L(z_n), \chi^*(z_{n+1}) - \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\Phi_U = \max\left\{\Phi_U(z_n), \chi^*(z_{n+1}) - \frac{\pi}{2}\right\}$$

② 利用式(15)计算 $[\tau_s]^+$, $[\tau_s]^-$, 且令 $T_{\text{ref}} = T$, $\tau_{s\text{ref}} = [\tau_s]^+ + [\tau_s]^-$;

③ 利用式(17)确定 Φ^+ , Φ^- 及 $\bar{\Phi}^+$, $\bar{\Phi}^-$;

④ 利用式(16)反演确定 h_m^+ , h_m^- ;

⑤ 利用式(18)确定 F^+ , F^- , 并执行 $F^+ = \min(F^+, F_c)$, $F^- = \min(F^-, F_c)$, 其中 F_c 为某个合适的临界值(本文取 0.4)。利用式(18)反算出 h_m^+ , h_m^- , 然后代入式(16)计算 $[\tau_s]^+$, $[\tau_s]^-$, 则利用下式

$$\tau_{sx}(z_{n+1}) = |[\tau_s]^+| \cos \Phi^+ + |[\tau_s]^-| \cos \Phi^-$$

$$\tau_{sy}(z_{n+1}) = |[\tau_s]^+| \sin \Phi^+ + |[\tau_s]^-| \sin \Phi^-$$

可确定 $\tau_s(z_{n+1})$, 此外还更新 T 为 $T = T_{\text{ref}} \cdot |[\tau_s(z_{n+1})]| / |\tau_{s\text{ref}}|$ 。跳转(2);

(3) τ_s 廓线的计算完成。

3 算例

3.1 环境场的廓线

在这里,我们将利用上一节给出的双波参数化方案计算由大别山触发的 OGWD 在不同风速廓线下的垂直结构。大别山地区的真实地形条件下的地形参数^[17]设计为, $\gamma = -1.75$, $C_1 = 2190 \text{ m}^2 \cdot \text{km}$, $C_2 = -373.4 \text{ m}^2 \cdot \text{km}$, $C_3 = -4.3 \text{ m}^2 \cdot \text{km}$ 和 $\kappa = 1.30 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$, 我们将利用这些参数考察在如下所示的风廓线条件下的 $\tau_s(z)$ 廓线。其中基流风速的定义为

$$\text{风廓线 1 } U = U_0 + \alpha z, V = 0 \quad (21a)$$

$$\text{风廓线 2 } U = U_0, V = \alpha z \quad (21b)$$

$$\text{风廓线 3 } U = U_0 \cos \beta z, V = U_0 \sin \beta z \quad (21c)$$

在与式(21)对应的所有算例中,浮力频率均为常数,即 $N = 0.01 \text{ s}^{-1}$, 密度廓线为

$$\bar{\rho} = \rho_0 \exp(-z/H) \quad (22)$$

其中, $\rho_0 = 1.22 \text{ kg/m}^3$, 标高 $H = 8 \text{ km}$ 。若令 $U_0 = 10 \text{ m/s}$, $|\alpha| = \sqrt{10} \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $|\beta| = \sqrt{10} \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$, 则根据定义,对 3 个算例均有 Richardson 数 $R_i = 10$ 。

3.2 波动应力的廓线

利用 2.2 节的计算步骤,图 3 给出了与风廓线式(21a)相对应的 OGWD τ_s 的垂直廓线。此时,由于考虑的是反向切变($\alpha < 0$),故在零风速高度($z_c = \sqrt{10} \times 10^3 \text{ m}$, 经典的临界层)处 OGWD 被完全吸收;又在地表与零风速高度之间没有发生波饱和过程,所以 OGWD τ_s 从地表到零风速高度之间呈如

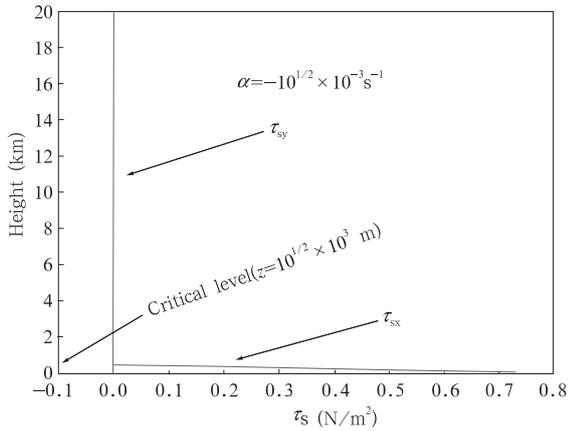


图 3 算例 1 的结果(这里只考虑反向切变的情况,此时在临界层($z_c = \sqrt{10} \times 10^3$ m)处,应力 τ_s 完全被吸收)
 Fig. 3 Results for case 1 (only the backward sheared wind is considered, and at the classical critical level ($z_c = \sqrt{10} \times 10^3$ m), the wave stress τ_s is completely attenuated)

图所示的线性变化。

对应风廓线式(21b),图 4 分别给出了在正向切变($\alpha > 0$)和反向切变($\alpha < 0$)两种不同风速变化形式下的 τ_s 廓线。从中我们可以明显地看到,由于风矢量方向随高度的变化,应力矢量 τ_s 随着高度的增加不断地偏离于风矢量方向。到达 $z = 20$ km 时(以风矢量旋转的方向作参考), τ_s 比 U 整整落后了 50° 。这与 Shutts^[14] 在相同风速廓线下,用解析解计算得到的由圆钟型孤立地形触发的 OGWD 的垂直廓线的特征一致。后者也证明,本文的双波方案对于选择性临界层吸收现象的处理是有效的。

图 5 给出了与式(21c)对应的 τ_s 随高度变化的曲线,与式(21b)类似,风矢量随高度的旋转使得 OGWD 不断被有选择地吸收,从而偏离于风矢量的方向。但是到达 $z = 9935$ m 高度以后,由于 OGWD

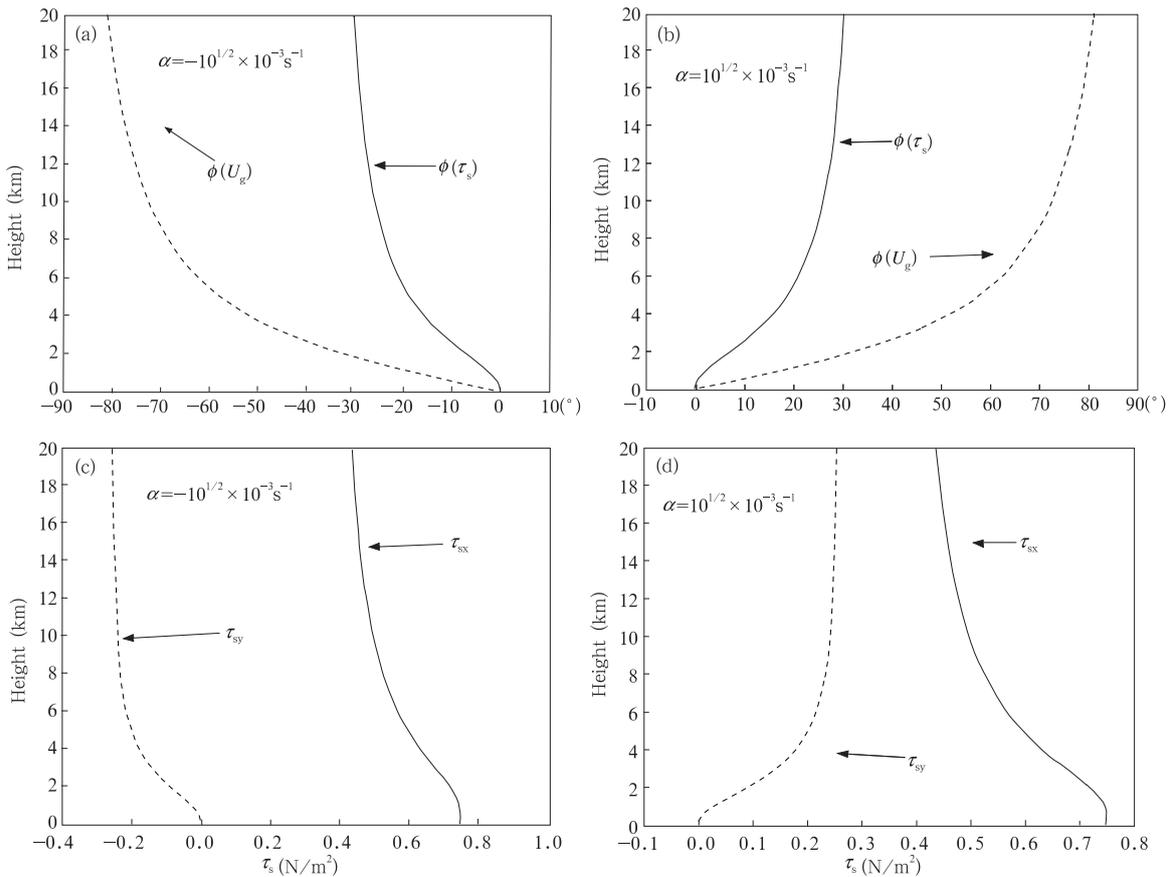


图 4 算例 2(在反向切变(a,c)和正向切变(b,d)两种情况下, τ_s 随高度的偏转总是比 U 随高度的偏转慢,在 $z = 20$ km 时,前者比后者慢了约 50°)

Fig. 4 Results for case 2 (a, c. backward sheared wind; b, d. forward sheared wind. The wave stress vector U always falls behind (seen from the latter) τ_s as the height increases, at $z = 2$ km, the former falls behind the latter with about 50°)

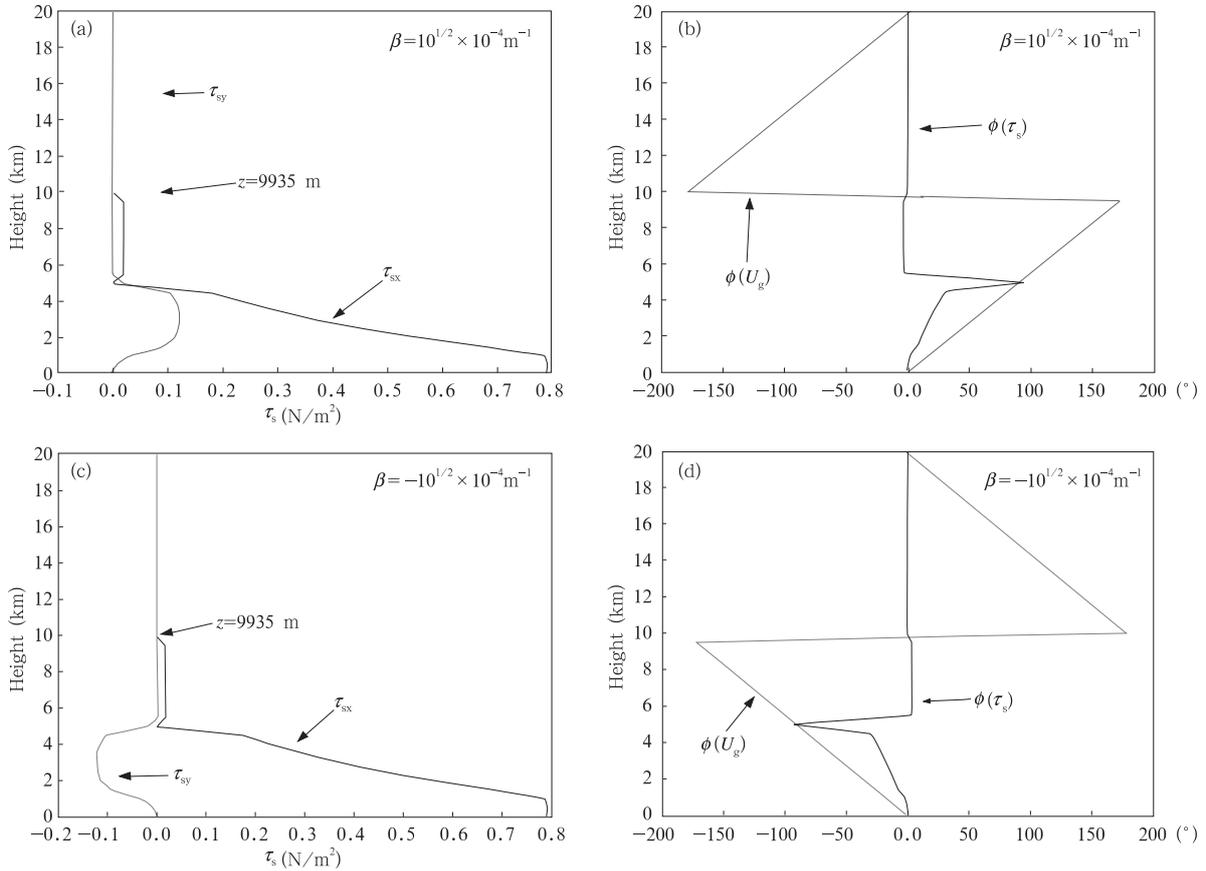


图 5 算例 3 , 在正向旋转(a,b)和反向旋转(c,d)两种情况下, 到高度 $z=9935$ m 时, 背景风矢量 \mathbf{U} 恰好随高度旋转了半圈, 此时 τ_s 完全被连续分布的选择性临界层吸收

Fig. 5 Results for case 3, under both the counterclockwise (a,b) and the clockwise rotation (c,d) of the ambient wind vector along with height, the wave stress vector τ_s vanishes at height $z=9935$ m, because the ambient wind \mathbf{U} has just rotated with a half circle from below and the continuous selective critical levels absorb the waves stress completely

被完全吸收, 在此高度以上则不存在因 OGWD 耗散对基本流的修正作用。

在图 6, 我们利用北半球中纬度冬季的纬向平均风速廓线(图6a)及美国标准大气(1976)提供的

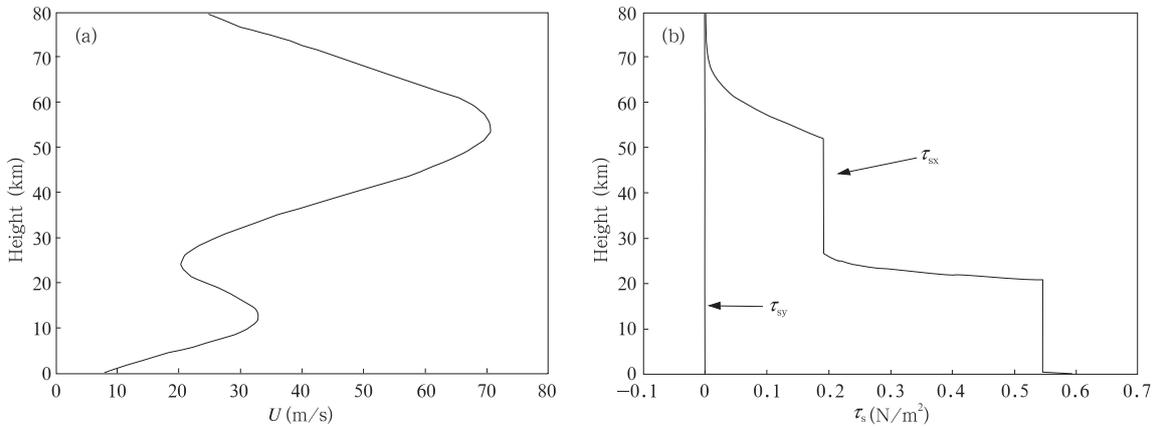


图 6 北半球冬季纬向平均风(a)及其中风廓线结合美国标准大气计算得到的应力廓线(b)

Fig. 6 A zonal average wind (a) in winter in middle latitude in north hemisphere; the corresponding wave stress profile computed from the wind profile (b) on the left together with the American Standard Atmosphere

稳定性和密度垂直分布,对由大别山造成的 OGWD 垂直廓线进行了计算。在那里,我们发现,在 0.0—0.5 km, 20.0—26.5 km 及 51.5—80 km 之间都存在一个 OGWD 的显著递减区;考虑到最后一段高度明显对应着平流层顶西风急流的位置,OGWD 的显著递减意味基本流被减速,所以,这里的双波方案的确能起到缓解西风偏差的目的。

4 结 论

利用 Taylor-Goldstein 方程式 (B_1) 的二阶 WKB 近似解,本文给出了一个与自由传播线性地形重力波相关的波动拖曳的双波参数化方案。通过一系列在大别山地区针对理想风速廓线和一个北半球中纬度冬季纬向平均风风速廓线下的 OGWD 垂直结构的计算,证明了我们的双波方案,在风向发生旋转时确实能够模拟 OGWD 矢量偏离与风向矢量这种事实,而且它也确实能在平流层西风急流对应的高度对基本流起到减速的效果,从而达到缓解西风偏差的目的。当然,构成一个完整的第 2 代 OGWD 参数化方案,以及该双波方案在大尺度数值模式中的作用和应用还有待进一步的研究。

参考文献

- [1] McFarlane N A. The effect of orographically excited gravity wave drag on the general circulation of the lower stratosphere and troposphere. *J Atmos Sci*, 1987, 44:1775-1800
- [2] Kim Y J, Eckermann S D, Chun H Y. An overview of the past, present and future of gravity-wave drag parameterization for numerical climate and weather prediction models. *Atmos Ocean*, 2003, 41: 65-98
- [3] Scinocca J F, McFarlane N A. The parameterization of drag induced by stratified flow over anisotropic topography. *Quart J Roy Meteor*, 2000, 126:2353-2393
- [4] Palmer T N, Shutts G J, Swinbank R. Alleviation of a systematic westerly bias in circulation and numerical weather prediction models through an orographic gravity-wave drag parameterization. *Quart J Roy Meteor*, 1986, 112:1001-1039
- [5] Lott F, Miller M J. A new subgrid-scale orographic parameterization; its formulation and testing. *Quart J Roy Meteor*, 1997, 123:101-127
- [6] Gregory D, Shutts G J, Mitchell J R. A new gravity-wave-drag scheme incorporating anisotropic orography and low-level wave breaking: Impact upon the climate of the UK Meteorological Office Unified Model. *Quart J Roy Meteor*, 1998, 124:463-493
- [7] Garner S T. A topographic drag closure built on an analytical base flux. *J Atmos Sci*, 2005, 62, 2302-2315
- [8] Kim Y J, Doyle J D. Extension of an orographic-drag parameterization scheme to incorporate orographic anisotropy and flow blocking. *Quart J Roy Meteor*, 2005, 131: 1893-1921
- [9] Eliassen A, Palm E. On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geophys Publ*, 1961, 22:1-23
- [10] Lindzen R S. Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown. *J Geophys Res*, 1981, 86:9709-9714
- [11] Smith R B. Linear theory of stratified flow past an isolated mountain. *Tellus*, 1980, 32:348-364
- [12] Hines C O. A modeling of atmospheric gravity waves and wave drag generated by isotropic and anisotropic terrain. *J Atmos Sci*, 1988, 45: 309-322
- [13] Shutts G J. Gravity wave-drag parameterization over complex terrain: The effect of critical-level absorption in directional wind-shear. *Quart J Roy Meteor*, 1995, 121:1005-1021
- [14] Shutts G J. Stationary gravity wave structure in flows with directional wind shear. *Quart J Roy Meteor Soc*, 1998, 124, 1421-1442
- [15] 高守亭, 冉令坤. 重力波上传破碎对中层纬向平均流拖曳的参数化方案. *科学通报*, 2003, 48(7): 726-729
- [16] Smith, R B. The influence of mountains on the atmosphere. *Adv Geophys*, 1979, 33, 87-230
- [17] 唐锦赞. 由复杂地形触发的重力波地表拖曳问题的计算及其参数化方案设计的理论研究[D]. 南京:南京大学, 2006: 69-73
- [18] 李家春, 周显初. 数学物理中的渐近方法. 北京:科学出版社, 1998:134-160

A TWO-WAVE SCHEME FOR OROGRAPHIC GRAVITY WAVE DRAG PARAMETERIZATION

Wang Yuan Tang Jinyun Wu Rongsheng

*The Department of Atmosphere Sciences, Nanjing University • Key Laboratory
of Mesoscale Severe Weather/MOE, Nanjing 210093*

Abstract

When the magnitude of sub-scale orographic forcing is comparable with explicitly ordinary dynamic forcing, the drag effect reduced by orographic gravity wave is to be significant for maintaining dynamic balance of atmospheric circulation, as well as the momentum and energy transport. Such sub-scale orographic forcing should be introduced into numerically atmospheric model by the means of drag being parameterized. Furthermore, the currently mature orographic gravity wave drag parameterization, whatever the first-generation (based on lineal single-wave theoretical framework) or the second-generation drag parameterization (an important extra forcing by the contribution of critical level absorption), they can not correctly and effectly describe the vertical profile of wave stress under the influence of ambient wind shearing. Based on aforementioned consideration, a two-wave scheme was proposed to parameterize the orographic gravity wave drag by freely propagating gravity waves. It starts with a second order WKB approximation, and treats the wave stress attenuations caused either by the selective critical level absorption or the classical critical level absorption explicitly; while in regions where critical levels are absent, it transports the wave stress vertically by two sinusoidal waves and deposits them according to the wave saturation criteria. This scheme is thus used to conduct some sample computations over the Dabie Mountain region. The results showed that the new two-wave scheme is able to model the vertical distribution of the wave stress more realistically.

Key words: Orographic gravity wave drag (OGWD), Two-wave parameterization of OGWD, Critical-level absorption, WKB Approximation.

附 录

A 扰动流体的控制方程

在非旋转框架内线性化理想、定常、静力、完全可压扰动流体的动量方程、连续方程和热力学方程之后,有

$$\mathbf{U} \cdot \nabla_H (\mathbf{U}'_H) + \omega' \mathbf{U}_z = -\frac{1}{\rho} \nabla_H p' \quad (\text{A}_1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho} g = 0 \quad (\text{A}_2)$$

$$\mathbf{U} \cdot \nabla_H \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) + \frac{\omega'}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} + \nabla_H \cdot \mathbf{U}'_H + \frac{\partial \omega'}{\partial z} = 0 \quad (\text{A}_3)$$

$$\mathbf{U} \cdot \nabla_H \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) + \beta \omega' = 0 \quad (\text{A}_4)$$

其中带撇号的变量为扰动量,带横杠的为背景流的变量; $\mathbf{U}'_H \equiv (u', v')$ 为水平扰动速度, $\mathbf{U} \equiv (U, V)$ 为背景流水平速度, $\beta = d(\ln \bar{\theta})/dz$, $\nabla_H(\cdot)$ 为水平梯度算子,其余的变量遵照通常的定义;式中的下标 z 表示变量对 z 的偏导数。为进一步闭合方程组(A₁)—(A₅),需引入关系

$$-\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\theta'}{\bar{\theta}} - \frac{1}{c_s^2} \frac{p'}{\rho} \quad (\text{A}_5)$$

对式(A₁)—(A₅),引入下面的变量代换

$$(\mathbf{U}_H, \omega, \rho, b) = \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}} \left(\mathbf{U}'_H, \omega', \frac{\rho'}{\rho}, g \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right)$$

$$\phi = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \frac{p'}{\rho_0} \quad (\text{A}_6)$$

并在连续方程中引入小冯赫兹数近似^[17],则有扰动流体的控制方程为

$$\mathbf{U} \cdot \nabla_H (\mathbf{U}_H) = -\nabla_H \phi - \omega \mathbf{U}_z \quad (\text{A}_7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Gamma_1 \right) \phi - b = 0 \quad (\text{A}_8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \Gamma_1 \right) \omega = -\nabla_H \cdot \mathbf{U}_H \quad (\text{A}_9)$$

$$\mathbf{U} \cdot \nabla_H (b) + N^2 \omega = 0 \quad (\text{A}_{10})$$

$$\rho = -\frac{b}{g} + \frac{\phi}{c_s^2} \quad (\text{A}_{11})$$

其中 $\rho_0 = \bar{\rho}(z=0)$; $\Gamma_1 = -\beta - S/2$, $S = \bar{\rho}_z / \bar{\rho}_0$.

B WKB 近似解

对式(A₇)和(A₁₁)二式施用二维傅立叶变换后,通过一系列运算能得到 Taylor-Goldstein 方程^[17]为

$$\hat{\omega}_{zz} + \left(\frac{N^2}{U_n^2} - \Gamma_1^2 - 2\Gamma_1 \frac{U_{nz}}{U_n} - \frac{U_{mzz}}{U_n} \right) \hat{\omega} = 0 \quad (\text{B}_1)$$

在假定 \mathbf{U} 随高度缓慢变化的条件下,式(B₁)有 WKB 近似^[18]解,

$$\hat{\omega}(Z) = \hat{\omega}(0) \exp \left\{ i\epsilon^{-1} \int_0^z \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j m_j(\xi) d\xi \right\} \quad (\text{B}_2)$$

其中 $Z = \epsilon z$, ϵ 为某个小参数,可以证明它与 $R_i^{-1/2}$ 成正比;垂直波数 m_j , $j=0, 1, 2, \dots$ 的零至二阶的表达式则

为

$$m_0 = \frac{N}{U_n} \quad (\text{B}_3)$$

$$\varepsilon m_1 = \frac{N}{U_n} \cdot \left(-\frac{\Gamma_1 U_n}{N} \cdot \frac{U_{nz}}{N} - \frac{i}{2} \frac{U_{nz}}{N} \right) \quad (\text{B}_4)$$

$$\varepsilon^2 m_2 = \frac{N}{U_n} \left\{ \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{U_n U_{nz}}{N^2} + \frac{U_{nz}^2}{2N^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_1 U_n}{N} \right)^2 \cdot \left(\frac{U_{nz}}{N} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. i \left[\frac{\Gamma_1 U_n}{2N} \cdot \frac{U_n U_{nz}}{N^2} + \frac{\Gamma_1 U_n}{2N} \cdot \frac{U_{nz}^2}{N^2} \right] \right\} \quad (\text{B}_5)$$

C 文中引用的相关公式及结果

式(13)中用到的 $\mathbf{E}(\chi)$ 的定义及其他相关结果

$$B_0 = \beta_1 + \beta_2 \cos 2\varphi + \beta_3 \sin 2\varphi = \\ \left[1 - \frac{\Gamma_1 (U_0 U_{0z} + V_0 V_{0z})}{2N(0)^2} - \frac{U_0 U_{0zz} + V_0 V_{0zz}}{8N(0)^2} - \frac{U_{0z}^2 + V_{0z}^2}{16N(0)^2} \right] - \\ \left[\frac{\Gamma_1 (U_0 U_{0z} - V_0 V_{0z})}{2N(0)^2} + \frac{U_0 U_{0zz} - V_0 V_{0zz}}{8N(0)^2} + \frac{U_{0z}^2 - V_{0z}^2}{16N(0)^2} \right] \cos 2\varphi - \\ \left[\frac{\Gamma_1 (U_0 V_{0z} + V_0 U_{0z})}{2N(0)^2} + \frac{U_0 V_{0zz} + V_0 U_{0zz}}{8N(0)^2} + \frac{U_{0z} V_{0z}}{8N(0)^2} \right] \sin 2\varphi \quad (\text{C}_1)$$

$$D_1 = 2C_1\beta_1 + C_2\beta_2 + C_3\beta_3 \\ D_2 = 2(C_2\beta_1 + C_1\beta_2) \\ D_3 = 2(C_3\beta_1 + C_1\beta_3) \quad (\text{C}_2)$$

$$D_4 = C_2\beta_2 - C_3\beta_3 \\ D_5 = C_2\beta_3 + C_3\beta_2 \\ E_{1x} = 2D_1 + D_2 + D_3 \tan \chi \\ E_{2x} = 2(D_1 + D_2) + D_4 + D_5 \tan \chi \\ E_{3x} = 2D_3 + D_5 + (2D_1 - D_4) \tan \chi \\ E_{4x} = 2D_4 + D_2 - D_3 \tan \chi \\ E_{5x} = 2D_5 + D_3 + D_2 \tan \chi \\ E_{6x} = D_4 - D_5 \tan \chi \\ E_{7x} = D_5 + D_4 \tan \chi \quad (\text{C}_3)$$

$$E_{1y} = 2D_1 - D_2 + D_3 \cot \chi \\ E_{2y} = 2(D_2 - D_1) - D_4 + D_5 \cot \chi \\ E_{3y} = 2D_3 - D_5 + (2D_1 - D_4) \cot \chi \\ E_{4y} = 2D_4 - D_2 - D_3 \cot \chi \\ E_{5y} = 2D_5 - D_3 + D_2 \cot \chi \\ E_{6y} = -D_4 - D_5 \cot \chi \\ E_{7y} = -D_5 + D_4 \cot \chi \quad (\text{C}_4)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(\chi) &= [E_{x1} \quad E_{x2} \quad E_{x3} \quad E_{x4} \quad E_{x5} \quad E_{x6} \quad E_{x7}] \\
\mathbf{E}_y(\chi) &= [E_{y1} \quad E_{y2} \quad E_{y3} \quad E_{y4} \quad E_{y5} \quad E_{y6} \quad E_{y7}] \\
\mathbf{E}(\chi) &= \frac{K_U^{\gamma+3} - K_L^{\gamma+3}}{8\pi(\gamma+3)K_0^\gamma} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x(\chi)\cos\chi \\ \mathbf{E}_y(\chi)\sin\chi \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}(\varphi) &= [1 \quad \cos 2\varphi \quad \sin 2\varphi \quad \cos 4\varphi \quad \sin 4\varphi \quad \cos 6\varphi \quad \sin 6\varphi]^\top
\end{aligned} \tag{C_5}$$

特别的,不考虑切变时,有

$$\begin{aligned}
B_0 &= \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta_3 = 0 \\
D_1 &= 2C_1, \quad D_2 = 2C_2, \quad D_3 = 2C_3, \quad D_4 = D_5 = 0
\end{aligned} \tag{C_6}$$

$$\begin{aligned}
E_{1x} &= 2D_1 + D_2 + D_3 \tan\chi \\
E_{2x} &= 2(D_1 + D_2) \\
E_{3x} &= 2D_3 + 2D_1 \tan\chi \\
E_{4x} &= D_2 - D_3 \tan\chi \\
E_{5x} &= D_3 + D_2 \tan\chi \\
E_{6x} &= E_{7x} = 0
\end{aligned} \tag{C_7}$$

$$\begin{aligned}
E_{1y} &= 2D_1 - D_2 + D_3 \cot\chi \\
E_{2y} &= 2(D_2 - D_1) \\
E_{3y} &= 2D_3 - 2D_1 \cot\chi \\
E_{4y} &= -D_2 - D_3 \cot\chi \\
E_{5y} &= -D_3 + D_2 \cot\chi \\
E_{6y} &= E_{7y} = 0
\end{aligned} \tag{C_8}$$

于是,可以很容易得到

$$\boldsymbol{\tau}_s(0) = T(0)\boldsymbol{\kappa}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 \cos\chi + \sigma_{xy}^2 \sin\chi \\ \sigma_{yy}^2 \sin\chi + \sigma_{xy}^2 \cos\chi \end{bmatrix} \tag{C_9}$$

$$h_0^2 = \frac{1}{XY} \int_0^X \int_0^Y h^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k,l) dk dl = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A(K,\varphi) K d\varphi dK \tag{C_{10}}$$