回溯时间积分格式的有效性研究*

游性恬 朱 禾 曹鸿兴 P4 A
(中国气象局培训中心，北京 100081) (中国气象科学研究院，北京 100081)

摘 要 采用正压准地转模式作为动力核，用 Rossby-Haurwitz 波函数作为理想场，同时使用回溯时间积分格式和普通中央差格式进行数值试验。结果表明，在短时积分的情况下，回溯格式能减小数值解误差 1～2 个量级，而且它对时间步长的增大不敏感。因此使用回溯格式可以减少积分计算量，延长积分时效。

关键词：数值模式；时间积分格式；自记忆；天气预报

1 引言

通常时间积分采用二时间层或三时间层格式[1]。三时间层格式在起步时先用向前格式外推一步（或半步）。所以无论二时间层或三时间层格式只用到了一个初始场，从信息论观点来看，数值积分只用到了一个初始场中的信息，显然所获信息量十分有限。大气运动是一个连续演变过程，从初始场及其前的观测场中提取更多信息显然对作出准确预报是十分有用的，我国气象学者已对此作了许多探讨[2,3]，基于这种观点，我们提出了与传统数值计算不同的时间积分格式，称之为回溯时间积分格式[4]。该格式能从包含初始场的若干时次的观测场中，提取信息。文献[4]对此作了简短报导，该文中对线性平流方程就由正余弦函数组成的理想场用回溯格式和蛙跃格式作了对比计算；结果表明，回溯格式的计算精度比蛙跃格式高 2～5 倍。

为了进一步考察回溯时间积分格式的有效性，我们将该格式用到正压准地转模式中，并运用 Rossby-Haurwitz 波作为流场，同时使用回溯格式和普通格式进行计算，以对比分析两者的积分精度。

大气自忆性方程是一个差分-积分方程，它能包容初始值及其前的观测往值[5]。我们已将它运用到数值谱模式[6,7]和区域气候预测模式[8]，取得了令人满意的效果。本文是将自忆性原理进一步应用到数值模式中，考察由此设计的时间积分格式的有效性。这里所说的有效性指准确度，时效和计算机耗时三者。

2 原理

不失一般性，大气运动方程可写为

$$\partial x / \partial t = F(x, \lambda, t), \tag{1}$$

2000-06-13 收到，2001-06-30 收到第三次修改稿
* 国家自然科学基金资助项目 49875025 和 49975017

其中 x 为物理量，λ 为参数。(1) 式左边为局地变化项，称为时间项，右边为除局地变化项外的所有项，称为空间项或源函数。

设记忆函数 $\beta(r,t)$ 为空间 r 和时间 t 的函数。在希尔伯特空间中定义内积

$$(f,g)=\int_a^b f(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad f,g\in L^2$$

用此内积对 (1) 式进行变换，运用微积分中的分部积分和中值定理可导得一个差分-积分方程[5]

$$\beta(r,t)x(t)-\beta(r,t_{-p})x(t_{-p})-\sum_{i=-p}^{0}[\beta(r,t_{i+1})-\beta(r,t_i)]x^m(t_i)$$
$$-\int_{t_{-p}}^{t}\beta(r,\tau)F(x,\lambda,\tau)\mathrm{d}\tau=0, \tag{2}$$

式中 p 为回溯阶，初始时次为 t_0。称 (2) 式为描述大气运动的自忆性方程。若将 $x(t)$ 视为预报时次，则 (2) 式中第 2、第 3 项代表 $p+1$ 个时次的局地往值对 $x(t)$ 的贡献，称为自忆项；第 4 项为 $p+1$ 个气象场 $F(x,\lambda,t)$ 对 $x(t)$ 的贡献，称为他效项。一旦用历史观测资料确定了记忆函数 β，就可用 (2) 式来进行积分。称以差分-积分方程 (2) 为基础构建的模式为自记忆模式，称 (2) 式中的 $F(x,\lambda,t)$ 为动力核。

为便于分析，选用简单的准地转正压无辐散模式

$$\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}=-J(\psi,\Delta\psi+f), \tag{3}$$

式中 ψ 为流函数，Δ 为水平 Laplace 算子，J 为水平 Jacobi 算子，f 为 Coriolis 参数。令 $q\equiv\Delta\psi$，运用向前差分 $\Delta t_j=t_{j+1}-t_j$、积分用求和替代，求得关于 q 的离散差分-积分方程，方程

$$q_t=\alpha_{-p}q_{-p}+\sum_{j=-p}^{-1}\theta_j q_j^m-\sum_{j=-p}^{0}\gamma_j J(\psi_j,q_t)-\sum_{j=-p}^{0}\varepsilon_j J(\psi_j,f), \tag{4}$$

式中

$$\alpha_{-p}=\beta(r,t_{-p})/\beta(r_i,t),$$
$$\theta_j=[\beta(r,t_{j+1})-\beta(r,t_j)]/\beta(r_i,t), \qquad j=-p,-p+1,\cdots,-1$$
$$\gamma_j=\Delta t_j\overline{\beta}(r,t_j)/\beta(r_i,t), \qquad j=-p,-p+1,\cdots,0$$
$$\varepsilon_j=\Delta t_j\tilde{\beta}(r,t_j)/\beta(r_i,t), \qquad j=-p,-p+1,\cdots,0$$

$q_{-p}=q(t_{-p})$，q_j^m 为 t_j 与 t_{j+1} 间 q 的中值，取为前后两个时次的平均值。由于 f 不随时间而变，Coriolis 涡度项的记忆函数显然应不同于相对涡度项的记忆函数。

取 $\beta(r_i,t_{-p-1})=0$，形式上取 $q_{t-p-1}\equiv q_{t-p}$，则 (4) 式变为

$$q_t=\sum_{j=-p-1}^{0}\theta_j y_j-\sum_{j=-p}^{0}\gamma_j J(\psi_j,q_j)-\sum_{j=-p}^{0}\varepsilon_j J(\psi_j,f). \tag{5}$$

运用初始时次前 L 个时次观测资料用广义最小二乘法求得 (5) 式中的记忆系数，再用 t_{-p} 到 t_0 时刻的前期资料由方程 (5) 计算 $t=1$ 时次的变量值，一般 $L\geqslant 30$，见图 1。

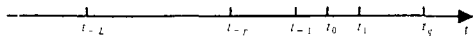

图 1　回溯格式中使用多时次观测资料示意图
p 为回溯阶，q 为积分步数，L 为估计记忆系数用的样本长度

采用 Rossby–Haurwitz 波[9]作为流场，取全球范围正方形网格，纬度 φ 和经度 λ 间隔为 $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 5°$，初始流函数和涡度分布见图 2。纬向和经向格点为 $i = 1, 2, \cdots, 73$，$j = 1, 2, \cdots, 73$，东西向令 $x_1 = x_{73}$，南北边界取固定边界条件。

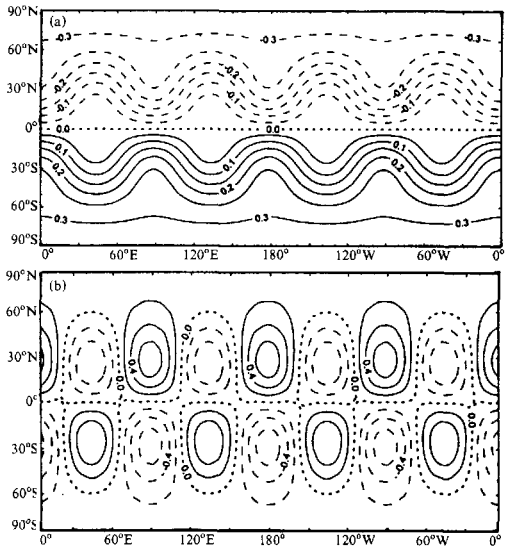

图 2　Rossby–Haurwitz 波初始场
(a) 流函数（单位：10^6 m^2 s^{-1}）；(b) 涡度（单位：10^{-4} s^{-1}）

积分试验进行时先算出足够样本长度的 Rossby–Haurwitz 波流函数和涡度场，然后估计记忆系数 t_j、γ_j、ε_j。计算中采用历史资料长度 $L = 36$，回溯阶 p 根据文献[4]，采用 $p = 5$，一旦求得记忆系数，就可用（5）式作一步积分 q_1。同时用普通格式对方程（1）进行时间积分，两种格式取相同的初始场及积分范围，格距和时间步长。普通格式先解泊松方程求得 $\partial\psi / \partial t$，接着，第一步用向前差随后为中央差格式。对回溯格式和普通格式的积分结果进行对比分析。

3 计算结果分析

3.1 短时积分

分别取$\Delta t=1$、3、5、8、12、24 h作一步积分，计算涡度数值解误差，并求出这6个时次的场均误差的平均值，结果见表1。从表1看到，对6个时间步长积分一步的平均绝对误差和均方根误差，回溯格式都比一般差分格式要小1～2个量级，平均极值（最大、最小值）也小1个量级。由此得知，回溯时间积分格式对提高积分准确率的贡献是毋庸置疑和相当显著的。

表1 涡度数值解误差的6个时间步长平均值 单位：s^{-1}

	绝对值误差	均方根误差	均方根误差最大值	均方根误差最小值
回溯格式	0.1783×10^{-7}	0.1869×10^{-6}	0.5282×10^{-5}	-0.5282×10^{-5}
普通差分格式	0.2661×10^{-5}	0.4043×10^{-5}	0.1917×10^{-4}	-0.1818×10^{-4}

3.2 长时积分

在积分试验中发现，回溯格式对时间步长Δt的大小不敏感，这在表2中可以看出。回溯格式无论对1 h、1 d乃至10 d时效，都以一步积分来制作，即时间步长与积分时效相同。但所取样本则根据积分时效T从初始时次t_0往前在Rossby-Haurwitz涡度场上抽取。如积分时效为10 d，则从t_0往前取$L+p+1=36$个间隔为10 d的时间截口，即需有360 d的Rossby-Haurwitz涡度场。对其他积分时效T采样办法相同。对普通格式分别用$\Delta t=1$ h、3 h和6 h进行迭代计算，其结果也给在表2。表2中还给出了普通格式以用上述一步积分办法所做的结果，虽然这不符合数值积分的常理，但由此却发现了一些有兴趣的结果。图3给出了两种格式计算的均方根误差曲线。

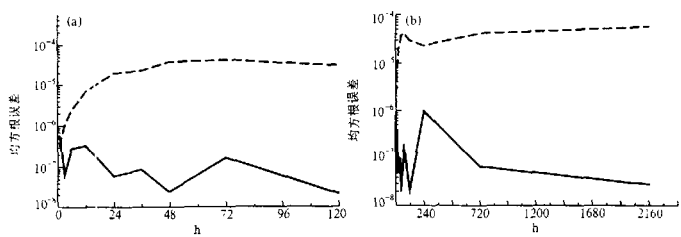

图3 计算的涡度均方根误差随积分时效的变化（单位：s^{-1}）
（a）5 d以内；（b）90 d以内
虚线：普通差分格式（$\Delta t=1$ h），实线：回溯格式（一步积分），纵坐标：对数坐标

在表2中我们看到，对普通格式而言，无论是否一步积分和取时间步长为1 h、6 h，均在积分时效为24 h时其全场平均均方根误差达到10^{-4}，而$\Delta t=3$ h时，误差更大些，达10^{-3}。也就是说，多次迭代在数学上讲是合理、必要的，可积分效果上并不比

表 2　回溯格式和普通格式在不同积分时效时的均方根误差

	1 h	3 h	6 h	12 h	24 h	36 h	48 h	72 h	120 h	10 d	30 d	90 d
R-H 波涡度场	0.3063 $\times 10^{-4}$	0.3064 $\times 10^{-4}$	0.3065 $\times 10^{-4}$	0.3072 $\times 10^{-4}$	0.3094 $\times 10^{-4}$	0.3117 $\times 10^{-4}$	0.3128 $\times 10^{-4}$	0.3090 $\times 10^{-4}$	0.2998 $\times 10^{-4}$	0.3081 $\times 10^{-4}$	0.3127 $\times 10^{-4}$	0.3081 $\times 10^{-4}$
回溯格式（一步）	0.5781 $\times 10^{-6}$	0.6524 $\times 10^{-7}$	0.2835 $\times 10^{-6}$	0.3401 $\times 10^{-6}$	0.6001 $\times 10^{-7}$	0.8600 $\times 10^{-7}$	0.2440 $\times 10^{-7}$	0.1660 $\times 10^{-6}$	0.2149 $\times 10^{-7}$	0.9757 $\times 10^{-6}$	0.6837 $\times 10^{-7}$	0.2853 $\times 10^{-7}$
普通格式（一步）	0.3290 $\times 10^{-6}$	0.1106 $\times 10^{-5}$	0.2049 $\times 10^{-5}$	0.4375 $\times 10^{-5}$	0.1072 $\times 10^{-4}$	0.2019 $\times 10^{-4}$	0.3241 $\times 10^{-4}$	0.6532 $\times 10^{-4}$	0.1407 $\times 10^{-3}$	0.2315 $\times 10^{-3}$	0.7198 $\times 10^{-3}$	0.2220 $\times 10^{-2}$
普通格式（迭代）1h	0.3290 $\times 10^{-6}$	0.1045 $\times 10^{-5}$	0.2517 $\times 10^{-5}$	0.6865 $\times 10^{-5}$	0.1977 $\times 10^{-4}$	0.2255 $\times 10^{-4}$	0.3745 $\times 10^{-4}$	0.4169 $\times 10^{-4}$	0.2998 $\times 10^{-4}$	0.2350 $\times 10^{-4}$	0.4134 $\times 10^{-4}$	0.5594 $\times 10^{-4}$
普通格式（迭代）3h		0.1106 $\times 10^{-5}$	0.3025 $\times 10^{-5}$	0.7580 $\times 10^{-5}$	0.1326 $\times 10^{-3}$	0.1944 $\times 10^{0}$	溢出					
普通格式（迭代）6h			0.2049 $\times 10^{-5}$	0.9938 $\times 10^{-5}$	0.7044 $\times 10^{-4}$	0.1792 $\times 10^{-2}$	0.1163 $\times 10^{2}$	溢出				

注：R-H 波涡度场一行表示 Rossby-Haurwitz 波涡度的全场平均值，其余均为积分结果与 R-H 波涡度场间的均方根误差。

一步积分好。就 24 h 积分而言，普通格式的一步积分甚至比其他 3 种步长迭代计算的效果要好，即均方根误差最小。普通格式取 $\Delta t = 1$ h 时迭代计算保持稳定，一直到 90 d，这是因为它符合差分线性稳定性条件。它的均方根误差一直保持在 10^{-4}。而普通格式一步积分的均方根误差积分时效 $T = 72$ h 时为 $0.653\,2 \times 10^{-4}$，到 120 h 时增大为 $0.140\,7 \times 10^{-3}$，即到 5 d 时普通格式一步数值解的误差增大了一个量级。回溯格式的情况则大不相同，在中期积分 $T = 120$ h $= 5$ d 范围内，它的均方根误差在 10^{-6} 与 10^{-7} 间摆动，即小于涡度场（10^{-4}）1～2 量级。更令人感兴趣的、或者说令人费解的是，当积分时效 T 从 10 d 一直增加到 90 d 时均方根误差仍在 10^{-6} 与 10^{-7} 间摆动，纵观 T = 1 h，3 h，…，30 d，90 d，回溯格式的均方根误差始终在 10^{-6} 和 10^{-7}，也就是说它对时间步长十分不敏感。这表明，在有足够长的历史观测资料情况下，利用回溯时间积分格式可以大大地加大时间步长，从而减少计算量且增加积分时效。

4　讨论

在运用回溯格式进行积分试验时，对所有积分时效都用一步制作，这是基于计算和观念两方面的考虑。积分迭代法的问题是误差的积累，即使小误差也会随着迭代步数增加而迅速传播增长，这可能就是表 2 中在 36 h 以内普通格式一步积分的均方根误差反而比多次迭代的均方根误差小的原因。

对正压涡度方程（3）用普通格式进行积分时，先用迭代法求解泊松方程（3），得到的是量级相对小的 $\partial\psi/\partial t$，然后用中央差分格式 $\psi^{n+1} = \psi^{n-1} + 2\Delta t(\partial\psi/\partial t)^n$ 求出下一时刻的 ψ^{n+1}，得到的是较为准确和稳定的 ψ^{n+1}，这在表 2 中 $\Delta t = 1$ h 迭代结果中可看出。而回溯格式是用（5）式求出 q^{n+1}，为得到流函数 ψ^{n+1}，必须求解泊松方程 $\Delta\psi^{n-1} = q^{n-1}$，这时 q 的量级为 10^{-4}，ψ 量级为 10^{9}，量级相差很大，用迭代法求解泊松方程时所得 ψ^{n+1} 的误差大，以致回溯格式的迭代计算难以继续下去。

数值预报是一种对大气"仿真"的思想。在制作预报过程中我们的基本思想是让计算

机中每一步迭代得到的要素场与真实大气的尽可能一致，那么最终积分得到 T 时效的天气与真实天气也会尽可能相符。而在经验预报、统计预报以及人工智能、模糊集方法等中往往是用一步法制作，即直接报出明天或下个月的天气或水文要素等，也就是着眼于报准 T 时效的天气，至于 T 时效前的具体变化并不看重，可以说这是一种"预报"思想，而非"仿真"思想。正是基于这样的考虑，加上上述计算上遇到的问题，我们作了 T = 1 h、3 h、…、5 d、10 d、…、90 d 的一步积分试验。结果表明，用回溯格式即使对 T = 90 d（即长达 3 个月）的积分，其均方根误差也出乎意外地小，这启示我们用回溯格式可以制作比普通格式远为长的积分，这为长期天气预报和短期气候预测提供了一种新思路。

参 考 文 献

1 张玉玲，吴辉碇，王晓林，数值天气预报，北京：科学出版社，1986，131～139.

2 丑纪范，天气预报中使用过去资料的问题，中国科学，1974，(6)，635～644.

3 Zhu Sheng-ning and Cao Hongxing, Preliminary study of barotropic stochastic difference model applied to weather prediction, *Acta Meteorologica Sinica*, 1991, **5**(1), 90～100.

4 曹鸿兴，封国林，数值模式中的回溯时间积分格式，应用气象学报，1999, **11**(2), 249～250.

5 曹鸿兴，大气运动的自忆性方程，中国科学（B辑），1993, **23**(1), 104～112.

6 曹鸿兴，蒋维东，哥道夫斯基，自忆谱模式及其初步应用，大气科学，1998, **22**(1), 119～126.

7 谷湘潜，一个基于大气自忆原理的谱模式，科学通报，1998, **43**(9), 909～917.

8 曹鸿兴，封国林，魏凤英，一种区域气候预测模式的构建，气象学报，2000, **58**(2), 159～167.

9 Phillips, N. A., Numerical integration of the primitive equations on the hemisphere, *Mon. Wea. Rev.*, 1959, **87**(9), 333～345.

On Efficiency of Retrospective Time Integration Scheme

You Xingtian and Zhu He

(*Training Center, China Meteorological Administration, Beijing* 100081)

Cao Hongxing

(*Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing* 100081)

Abstract Adopting the barotropical quasi-geostrophic model as a dynamic kernel and taking Rossby-Haurwitz wave as an idealized field, numerical weather forecast experiments were carried out by means of both retrospective time integration scheme and leapfrog one. Results show the former can reduce the forecast error at 10^{-1}～10^{-2} in comparison with the latter in case of 1h to 24 h lead. Moreover, the retrospective scheme is little sensitive to the time-step extending. Therefore, the computational amount for numerical integrations can be saved and valid prediction time can be enlarged when using the retrospective scheme.

Key words: numerical model; time integration scheme; self-memory; weather forecasting