

地震活动数学建模的物理含义及 等价动力学过程

郭大庆 杨立明 石特临

(国家地震局兰州地震研究所, 兰州 730000)

摘要 在对时序数学模型进行较为系统地研究的基础上, 本文探索将离散数学模型转换为连续动力微分方程, 实现由实测数据反演动力微分方程。本文介绍了模型转换的原理、具体计算方法, 探讨了方程的物理含义及所反映的动力学过程, 并给出了计算实例。

关键词: 离散模型 连续模型 动力微分方程 预测模型

1 引言

在对地震活动、演化及预测的研究中, 作者对离散数学模型进行了较为系统、深入的研究, 先后进行了自回归 AR(n) 模型、门限自回归模型、指数自回归模型等系列的建模工作, 将所建模型应用于青藏高原北部、中国大陆及大陆西部等地区进行不同时空尺度的地震预测和地震活动分析研究^[1-6], 取得了一定的效果。但在这些工作中较少涉及模型的动力学过程和物理含义的讨论。如果能将这些离散形式的模型转化成微分方程, 即由实测的离散采样数据反演系统的动力微分方程, 用微分方程进一步研究系统的动态特性和物理本质, 这无疑将加强时序模型的研究深度, 开拓应用和研究的思路。本文介绍了将离散模型转换为连续动力微分方程的原理及方法, 并对其物理含义及其他有关问题进行了讨论。

2 模型转换的物理意义

实际上一些简单的结论已经体现了模型转换的意义。一个一阶差分方程

$$x_t + a_1 x_{t-1} = b f_t$$

其相应的微分方程为

$$c \dot{x} + kx = f(x)$$

它代表了一种单自由度的振动系统。二阶差分方程

$$x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} = b_1 f_t + b_2 f_{t-1}$$

相应的微分方程是

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = c \dot{y} + Ry$$

它代表了单自由度的强迫振动系统, 若简化为 AR(2) 模型, 则相应的微分方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$$

它代表了单自由度的自由振动。考虑到一般形式的微分方程

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = \beta_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + \beta_0 z(t)$$

写成传递函数形式为

$$\alpha(D)x(t) = \beta(D)z(t)$$

其中左边体现了系统的固有特性和规律,对应于 ARMA 模型的 AR 部分;右边反映了系统同外界的相互联系及作用方式,对应于 ARMA 模型的 MA 部分。所以 ARMA 模型的 AR 部分表征了系统的固有特性,MA 部分则代表了外激励,因而将离散的差分方程形式的模型转化成微分方程,具有深刻的物理含义。

由于门限自回归模型实际上是一组 AR 模型,指数自回归模型是一种特殊形式的 AR 模型,因而 AR 模型的转换具有一定的代表性。由于 AR 模型又是 ARMA(n,m)模型的特殊情况,所以本文以 ARMA(n,m)模型为例进行研究。

3 模型转换的基本原理和方法^[7]

3.1 转换原则

时间序列是对某一连续过程离散采样的结果,因而时间序列中所含的信息同原连续过程相比较,有一定的损失,基于时序所建立的离散模型也必将丧失原连续过程的部分信息。因此,由离散模型向连续模型的转换,是一种等价意义上的转换,不可能恢复原系统的全部信息,但是它们仍保留了原连续系统的主要特征,表现在:(1)在采样点上,两者具有相同的测值 $\{x_i\} = \{x(t)\}$; (2)两者具有相同的统计特性,自协方差函数相等,即 $R_x = R(s)$ 。

由于 ARMA(n,m)模型在时域中的主要特征由系统的单位脉冲响应函数 G_j ,即 Green 函数和动态数据的自协方差函数 R_x 来表征,同样,对连续系统,Green 函数和自协方差函数也是同等重要的表征系统基本特征的量。对同一系统而言,这两者也对应相等,所以在转换中遵循的原则是在采样点上,时间序列与原连续系统具有相同的自协方差函数或 Green 函数。

3.2 转换方法

基于以上原则,在转换中有两套方法可循,其一是根据自协方差函数相等的原则,与之相应地有时域内的转换法和频域内的转换法,其中 AR 部分的转换,不论以那种方式,转换公式均可写成 $\lambda_i = e^{s_i \Delta}$,当 Δ 满足 Shannon 采样定理时,转换唯一,而 MA 部分的转换在时域内需求解非线性方程组且转换不唯一,在频域中的转换受系统的稳定性要求的限制。其二是据格林函数相等的原则在时域中转换,此时亦需求解非线性方程组,且转换不唯一。但如果采用传递函数法进行转换,则不仅简单,而且唯一。

由于一般形式的微分方程

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = \beta_{n-1} z^{(n-1)}(t) + \cdots + \beta_0 z(t) \quad (1)$$

引入微分算子 $D = \frac{d}{dt}$ 后变成

$$\alpha(D)x(t) = \beta(D)z(t) \quad (2)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 = \sum_{j=0}^n a_j D^j \\ \beta(D) = \beta_{n-1} D^{n-1} + \cdots + \beta_1 D + \beta_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j D^j \end{cases}$$

记为 $AM(n, n-1)$, 写成传递函数形式为

$$x(t) = \frac{\beta(D)}{\alpha(D)} z(t) \quad (3)$$

且 $\alpha(D)$ 、 $\beta(D)$ 可写成

$$\begin{cases} \alpha(D) = (D - \mu_1)(D - \mu_2) \cdots (D - \mu_n) = \prod_{j=1}^n (D - \mu_j) \\ \beta(D) = \beta_{n-1}(D - \nu_1)(D - \nu_2) \cdots (D - \nu_{n-1}) = \beta_{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (D - \nu_j) \end{cases} \quad (4)$$

其中 μ_i 是 AR 部分的特征根, 是传递函数的极点, 表征系统的固有特性, ν_i 是 MA 部分的特征根, 表征系统同外界的联系, 是传递函数的零点。

由于 $AM(n, n-1)$ 模型的 Green 函数具有如下形式:

$$G(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\mu_i t}, \quad t = j\Delta \quad (5)$$

ARMA(n, m) 模型的 Green 函数为

$$G_j = \sum_{i=1}^n g_i \lambda_i^j \quad (|\lambda_i| < 1) \quad (6)$$

其中

$$g_i = \lambda_i^{n-m-1} \frac{\prod_{j=1}^m (\lambda_i - \eta_j)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_l)} \quad (7)$$

λ_i, η_k 分别是 ARMA 模型 AR、MA 部分的特征根。据采样点上 Green 函数相等的原则有

$$\sum_{i=1}^n C_i e^{\mu_i \Delta j} = \sum_{i=1}^n g_i \lambda_i^j$$

于是有

$$\begin{cases} \lambda_i = e^{\mu_i \Delta} \\ g_i = C_i \end{cases} \quad (8)$$

将(4)式代入(3)式中的传递函数部分:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{\beta_{n-1}(s - \nu_1)(s - \nu_2) \cdots (s - \nu_{n-1})}{(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)} \\ &= \beta_{n-1} \left(\frac{C_1}{s - \mu_1} + \frac{C_2}{s - \mu_2} + \cdots + \frac{C_n}{s - \mu_n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - \mu_i} \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$C_i = \beta_{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (\mu_i - \nu_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\mu_i - \mu_j)} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

将(9)式代入(3)式中:

$$x(t) = \frac{\beta(D)}{\alpha(D)} z(t) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{D - \mu_i} z(t) \quad (10)$$

将(8)式代入(10)式得:

$$x(t) = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (D - \mu_j)}{\prod_{j=1}^{n-1} (D - \mu_j)} z(t) \quad (11)$$

将(11)式同(3)式相比较可见:

$$\begin{cases} \beta(D) = \sum_{i=1}^n g_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (D - \mu_j) \\ \alpha(D) = \prod_{i=1}^n (D - \mu_i) \end{cases} \quad (12)$$

可见只要求出 $\beta(D)$ 、 $\alpha(D)$ 即可实现转换。

4 基于地震活动的模型转换实例

对青藏高原北部地震区(N32'—43', E98'—110')1950—1992 年年最大震级序列建模,得到如下 AR(3)模型:

$$x_n = 0.3784 x_{n-1} + 0.1333 x_{n-2} + 0.4843 x_{n-3}$$

这是 ARMA(3,0)模型的特例。

AR 部分的特征方程为

$$\lambda^3 - 0.3784\lambda^2 - 0.1333\lambda - 0.4843 = 0$$

其特征根 $\lambda_1 = 0.9981$, $\lambda_{2,3} = -0.3098 \pm i 0.6239$ 。

MA 部分的特征根 $\eta_k = 0$ 。

4.1 关于 μ 的求取

由于选用了年最大震级序列, $\Delta = 1$ 年, 据(8)式有 $\mu_i = \frac{1}{\Delta} \ln \lambda_i$, 因此

$$\mu_1 = \frac{1}{\Delta} \ln \lambda_1 = -0.0019$$

λ_2, λ_3 为共轭复根, 据有关结论,

$$\mu_{2,3} = \frac{1}{\Delta} \ln \lambda_{2,3} = \frac{1}{\Delta} [\ln |\lambda_j| \pm i(\arg \lambda_i + 2k\pi)] (k=1, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

其中

$$\begin{cases} |\lambda_j| = e^{\operatorname{Re}(\mu_j)\Delta} = e^{-\zeta\omega_n\Delta} \\ \arg \lambda_i + 2k\pi = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \Delta \\ \zeta = -\frac{(\lambda_2 + \lambda_3)}{2\sqrt{\lambda_2\lambda_3}} \\ \omega_n = \sqrt{\lambda_2\lambda_3} \end{cases}$$

故 $\zeta = 0.4448$, $\omega_n = 0.6965$, $\ln |\lambda_j| = -0.3098$

由于 $\arg \lambda_j + 2k\pi = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \Delta$

代入 ω_n, ζ 的值得 $\arg \lambda_j + 2k\pi = 0.6238$

满足条件 $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} < \pi$, 故能保证转换的唯一性。所以取

$$\arg \lambda_j + 2k\pi = 0.6238\Delta$$

可得 $\mu_{2,3} = -0.3098 \pm i 0.6238$

4.2 求取 g_i

由于本模型是 ARMA(3,0)的特例, 故 $m=0, n=3, \eta_k=0$ 。代入 η_k, λ_j 于(7)式中得

$$\begin{cases} g_1 = 0.4735 \\ g_2 = -0.047 + i 0.1809 \\ g_3 = -0.047 - i 0.1819 \end{cases}$$

4.3 确定 $\alpha(D), \beta(D)$

将 g_i, μ_i 代入(12)式得

$$\begin{cases} \alpha(D) = D^3 + 2.521D^2 + 1.6626D + 0.9224 \\ \beta(D) = 0.3795D^2 + 0.0385D + 0.2292 \end{cases}$$

4.4 转换微分方程的建立

据传递函数法

$$\alpha(D)x(t) = \beta(D)z(t)$$

将 $\alpha(D), \beta(D)$ 代入, 即可得出所求微分方程式:

$$\frac{dx^3}{dt^3} + 0.6215 \frac{dx^2}{dt^2} + 0.4863 \frac{dx}{dt} + 0.0009x = 0.3795 \frac{dz^2}{dt^2} + 0.0385 \frac{dz}{dt} + 0.2292z$$

5 讨论与结论

由前面的转换可以看出, 描述地震活动的一个 AR(3)模型可以转换成一个三阶的非齐次常微分方程, 物理内含相当丰富, 表现在:

(1) 该方程的左边是一个三阶齐次微分方程, 描述了地震活动的“固有”运动, 相应的齐次通解可以写成:

$$x^* = C_1^{-0.0736t} + e^{-0.2740t} (C_2 \cos 0.7807t + C_3 \sin 0.7807t)$$

可见, 地震活动的固有运动包含两部分, 其一为衰减的趋势项, 其二为周期振荡项, 分别对应于本区本世纪以来地震活动的衰减趋势和活跃—平静相间的准周期特性, 同时亦表明相应的孕震系统相当于一个振动系统, 因而才可能在外界作用下产生周期或准周期的活动行为。

(2) 该方程的右边是“外激励”, 代表了外界或系统周缘的外作用。若用一般形式 $f(z)$ 来反映外作用的形式, 则方程可写为

$$\ddot{x} + 0.6215 \dot{x} + 0.4863 x + 0.009x = f(z)$$

当 $f(z) = \cos t$ 时, 相当于一个持续的缓慢的外作用, 此时模型的通解为

$$x = x^* + c_4$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 的取值决定于此作用和初值条件, 此解仍表现出周期运动, 相当于地震活动的周期行为。

当 $f(z) = H \sin \omega t$ 时, 相当于一个周期的外作用, 模型的解形式上为

$$x = x^* + f(H, \omega) \sin \omega t$$

表现为一种较复杂的周期行为的迭加。

当 $f(z) = d z + e z + f z$ 时, 相当于一种相对复杂的外作用, 分析方程的形式可知, 应该具有 ke^r 形式的特解。当 r 是复数时, ke^r 含有 $\sin \omega t$ 项; 当 r 是实数时, 则是一种非线性指数发散的形式, 前者表现为周期行为, 后者表现了外界的制约和主导作用, 因而此时的活动形式已很复杂。

综合这三种形式, 方程的解可写为:

$$x = x^* + x'$$

其中 x^* 随时间衰减, x 的非齐次作用越来越大, 这相当于块体的作用或系统的外作用在起主导作用。

当然, 一般意义上来讲, 对离散模型进行转换是有条件的, 除满足前述的转换原则外, 还应满足:

$$\lambda_i = e^{\mu_i \Delta}, \mu_i = \frac{1}{\Delta} \ln \lambda_i$$

即只有离散 ARMA 模型的根 λ_i 为正数或复数, 此时的系统才是物理上可实现的, 也才能进行转换。

从上述的讨论可以看出, 一个预测的时序数学模型在一定的条件下可以转换成连续动力方程, 这一方程在一定意义下等价于原离散模型。连续模型可以从物理上对离散模型描述的物理系统进行定性或定量的讨论与研究, 这将有助于预测模型的应用和深化。

参考文献

- 1 石特临, 郭大庆, 等. 应用动态序列建模法研究我国大陆和青藏高原北部地区地震活动大形势. 中国地震大形势预测研究, 北京: 地震出版社, 1990. 82—89
- 2 郭大庆, 杨立明, 等. 利用门限自回归建模和样条函数拟合方法研究甘肃东南部地区地震活动特征. 西北地震学报, 1992, 14(2): 20—29
- 3 杨立明, 郭大庆, 石特临. 应用动态时变参数多层递阶法进行地震预报研究. 西北地震学报, 1993, 15(3): 11—19
- 4 石特临, 郭大庆, 等. 甘肃及邻区地震活动基本特征和预测方法. 昌马地震与七级强震研究, 北京: 地震出版社, 1994, 82—95
- 5 杨立明, 石特临, 郭大庆. 地震活动非线性行为的数学建模. 地震学报, 1995, 17(2): 180—187
- 6 郭大庆, 杨立明, 等. 中国西部及西部边缘 $M_s \geq 7.0$ 级地震关系研究. 高原地震, 1994, 6(2): 1—10
- 7 杨叔子. 时间序列分析的工程应用. 武汉: 华中理工大学出版社, 1991

PHYSICAL MEANS AND EQUIVALENT DYNAMIC PROCESS OF MATHEMATICAL SEISMICITY MODEL

Guo Daqing, Yang Liming and Shi Telin

(Earthquake Research Institute of Lanzhou, SSB, Lanzhou 730000)

Abstract

On the basis of the systematic study for the mathematical time sequence model, the principle, algorithm, limitation and application in seismology have been researched to transform the discrete models into continuous dynamic differential equation. The equation has been achieved by the observed data, the physical means and the dynamic process of the models have been discussed and the depth of the study for the models has been widened.

Key words: Discrete model, Continuous model, Dynamic differential equation, Prognostic model