

台 风 的 螺 旋 结 构*

刘 式 适 杨 大 升

(北京大学地球物理系)

提 要

本文从描写台风运动的动力方程组出发, 讨论了台风的螺旋结构, 给出了这种螺旋结构的图样, 指出: (1) 台风螺旋结构的形成是台风中重力惯性内波, 特别是重力内波的作用所致, (2) 台风螺旋结构的形式与波位相速紧密相关, 北半球的曳式螺旋结构要求螺旋图样环绕台风眼逆时针且由中心向外运动, 其向外运动的速度近于重力内波的传播速度, (3) 台风的曳式螺旋倾角一般小于 45° , 而在台风边缘, 倾角约为 10° , 螺旋臂间距在二旋臂结构中平均为 220 公里, 而在四旋臂结构中平均为 110 公里, (4) 台风螺旋波也有频散作用, 在曳式螺旋中 c_{gr} 与 c_r 皆为正, 且 $c_{gr} < c_g$, 它说明台风螺旋结构只要有充足的水汽和相应的潜热供给, 就可维持。

一、引 言

人们早就发现台风中一个重要而有意义的现象是: 在台风眼外, 一直到台风边缘存在一个螺旋状的结构, 随着气象卫星的发射, 这种结构又从卫星云图中清晰地看到, 其主要表现为螺旋云带和相应的螺旋雨带。

大量观测表明, 螺旋带排列整齐, 它围绕台风中心运动, 角速度一般大于基本气流的角速度, 同时螺旋带沿径向向外运动, 移速近于重力内波的传播速度, 约为 28 米/秒。北半球螺旋带呈曳式, 以 2—4 条带的居多, 相邻两条带的间距从几十公里到几百公里不等(条数越多, 间距越小), 但靠中心外间距较宽。螺旋带与圆形等压线(或等重力位势线)的夹角从内向外越来越小, 边缘夹角在 10° — 20° 左右。

近数年来, 许多作者^[1-4]对台风的螺旋结构进行了分析和数值试验, 取得了一些有意义的结果。自 1964 年林家翘等创立星系螺旋结构的密度波理论以来, 我国巢纪平、叶笃正首先将此学说应用于地球大气, 我们也分析了地球大气行星波的螺旋结构^[5], 并在文中指出: 气旋、反气旋、台风、龙卷风等局部系统也存在类似的螺旋结构, 有待进一步深入研究, 本文就台风的螺旋结构进行探讨。

二、基 本 方 程 组

取原点在台风中心的柱坐标系 (r, θ, z) , 相应的空气运动速度为 (u, v, w) 。 $u \equiv \frac{dr}{dt}$ 为径向速度, 自中心向外为正; $v \equiv r \frac{d\theta}{dt}$ 为切向速度, 逆时针为正; $w \equiv \frac{dz}{dt}$ 为垂直运动,

* 本文于 1979 年 6 月 11 日收到, 1979 年 9 月 19 日收到修改稿。

向上为正。

在这个坐标系中, 不考虑摩擦, 描写台风运动的基本方程组为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u v}{r} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \\ p = \rho R T \\ c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial r} + v \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ = -L \left(\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial r} + v \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} + w \frac{\partial q}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (1)$$

其中 p, ρ, T, q 分别表示气压、密度、温度和饱和比湿, $f = 2 \Omega \sin \varphi$ (Ω 为地球自转角速度, φ 为纬度) 是 Coriolis 参数, 取为常数。 g 是重力加速度, R 是气体常数, c_p 是定压比热, L 为凝结潜热。

方程组(1)包含六个方程, 但有七个未知数(u, v, w, p, ρ, T, q)是不封闭的, 但若把 q 视为已知的, 则方程组(1)是封闭的。

三、基 态 解

假设台风的基本状态是定常的和轴对称的, 且具体设为

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}(r), \bar{v} = \bar{v}(r) = \bar{\Omega}(r) \cdot r, \bar{w} = 0 \\ \bar{p} = \bar{p}(r, z), \bar{\rho} = \bar{\rho}(z), \bar{T} = \bar{T}(r, z), \bar{q} = \bar{q}(r, z) \end{array} \right. \quad (2)$$

式中 $\bar{\Omega}$ 为台风气流的基本角速度。

基态场(带“—”的量)满足(1), 得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{\Omega}^2 r - f \bar{\Omega} r = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \\ \bar{u} \left(\frac{\partial r \bar{\Omega}}{\partial r} + \bar{\Omega} + f \right) = 0 \\ 0 = -g - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\rho} \bar{u}) = 0 \\ \bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T} \\ \bar{u} \frac{\partial}{\partial r} \left(c_p \bar{T} - \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + L \bar{q} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

(3)包含六个方程, 六个未知数($\bar{u}, \bar{\Omega}, \bar{p}, \bar{\rho}, \bar{T}, \bar{q}$)是封闭的, 其中第一式为准梯度风关系,

第三式为静力学关系。

(3)之第二式解得

$$r^2 \left(\bar{\omega} + \frac{1}{2} f \right) = c_1 \quad (4)$$

c_1 是积分常数, (4)表征的是切向绝对角动量守恒定律。

(3)之第四式解得

$$r \bar{u} = c_2 \quad (5)$$

c_2 是积分常数。

设台风眼的半径为 a , 在 $r = 2a$ 处附近, 径向风速、切向风速分别写为 $\bar{u}_m$ 和 $\bar{v}_m$,

相应地在 $r = 2a$ 处附近的切向角速度为

$$\bar{\omega}_m = \frac{\bar{v}_m}{2a} \quad (6)$$

则由(5)和(4)得到

$$\bar{u} = \bar{u}_m \cdot \frac{2a}{r} \quad (7)$$

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{2} f + \left(\bar{\omega}_m + \frac{1}{2} f \right) \left(\frac{2a}{r} \right)^2 \quad (8)$$

而

$$\bar{v} = -\frac{1}{2} f r + \left(\bar{\omega}_m + \frac{1}{2} f \right) (2a)^2 / r \quad (9)$$

上面 $\bar{u}, \bar{v}$ 的解式都不能用于台风中心, 因为在积分中都含有 $1/r$ 的运算。郭晓岚^[6]从较严格的能量计算也证明, 对流涡旋系统的一个普遍性质就是必须有一个象台风眼这样的具有另外的运动性质的中心区域。(7) 表明 $\bar{u}$ 与 r 成反比, (8) 表明 $\bar{\omega}$ 近似与 r^2 成反比, (a) 的计算也表明 $\bar{v}$ 随 r 的增加而减小, 这些都是与台风的实际状况定性一致的。若取 $a = 25$ 公里 $= 2.5 \times 10^4$ 米, $\bar{v}_m = 25$ 米/秒, $\bar{u}_m = 5$ 米/秒, $f = 2 \times 10^{-5}$ 秒⁻¹, 于是 $\bar{\omega}_m = 5 \times 10^{-4}$ 秒⁻¹, 则 $\bar{u}, \bar{\omega}, \bar{v}$ 的径向分布见图 1、图 2 和图 3。

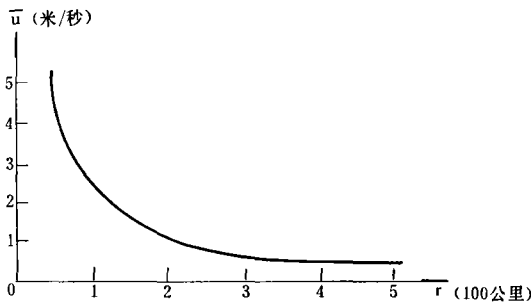


图 1 $\bar{u}$ 的径向分布

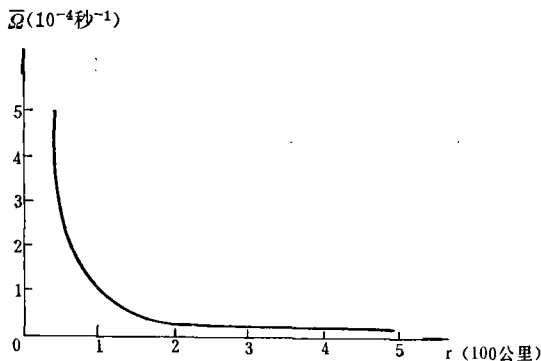


图 2 $\bar{\omega}$ 的径向分布

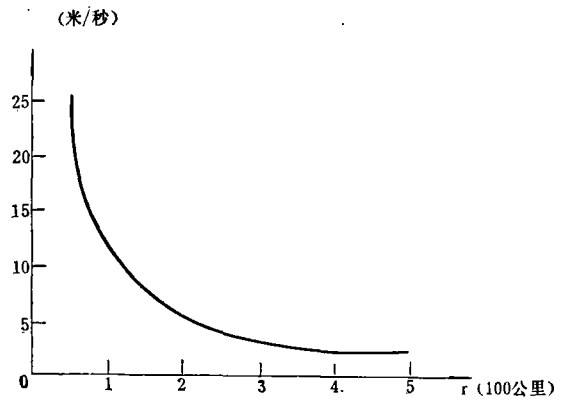


图 3 $\bar{v}$ 的径向分布

由(3)之第一式得

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = -\bar{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) - \bar{\omega} (f + \bar{\omega}) r \right] \quad (10)$$

将(7), (8)两式代入, 积分, 解得

$$\bar{p} = \bar{p}_m + \bar{\rho} \left\{ \frac{\bar{u}_m^2 + \left(\bar{\omega}_m + \frac{1}{2} f \right)^2 \cdot (2a)^2}{2} \left[1 - \left(\frac{2a}{r} \right)^2 \right] - \frac{f^2 (2a)^2}{8} \left[\left(\frac{r}{2a} \right)^2 - 1 \right] \right\} + A(z) \quad (11)$$

式中 $\bar{p}_m$ 代表 $r=2a$ 处的气压, $A(z)$ 为积分引入的函数, 它满足静力学关系

(11)代入(3)之第五式解得

$$\bar{T} = \bar{T}_m + \frac{1}{R} \left\{ \frac{\bar{u}_m^2 + \left(\bar{\omega}_m + \frac{1}{2} f \right)^2 \cdot (2a)^2}{2} \left[1 - \left(\frac{2a}{r} \right)^2 \right] - \frac{f^2 \cdot (2a)^2}{8} \left[\left(\frac{r}{2a} \right)^2 - 1 \right] \right\} + B(z) \quad (12)$$

式中 $\bar{T}_m$ 代表 $r=2a$ 处的气温, $B(z) = A(z)/\rho R$ 。

由(3)之第六式得

$$\frac{\partial}{\partial r} (c_v \bar{T} + L \bar{q}) = 0 \quad (13)$$

式中 c_v 为定容比热。上式积分, 解得

$$\bar{q} = -\frac{1}{L} C_v \bar{T} + C(z) \quad (14)$$

$C(z)$ 为积分引入的函数

因 $\bar{\omega}_m^2 \gg f^2$, 则由(11), (12), (13)的计算表明: 在台风范围内 ($r \leq 500$ 公里) 包含 $\left[1 - \left(\frac{2a}{r} \right)^2 \right]$ 的项远较包含 $\left[\left(\frac{r}{2a} \right)^2 - 1 \right]$ 的项重要。

由(10)和静力学关系((3)之第三式)得

$$\begin{aligned} \delta p &\equiv \frac{\partial p}{\partial r} \delta r + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z \\ &= -\bar{\rho} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) - \bar{\omega} (f + \bar{\omega}) r \right] \delta r + g \delta z \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

令 $\delta p = 0$, 则

$$\delta \phi = \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) + \bar{\omega} (f + \bar{\omega}) r \right] \delta r \quad (16)$$

式中 $\phi = gz$ 表示重力位势, $\delta \phi = g \delta z$ 。

对上式两边积分, 解得等压面上重力位势 ϕ 随 r 的变化关系为

$$\phi = \phi_m + \left\{ \frac{\bar{u}_m^2 + \left(\bar{\omega}_m + \frac{1}{2}f \right)^2 \cdot (2a)^2}{2} \left[1 - \left(\frac{2a}{r} \right)^2 \right] - \frac{f^2 (2a)^2}{8} \left[\left(\frac{r}{2a} \right)^2 - 1 \right] \right\} \quad (17)$$

式中 ϕ_m 为 $r=2a$ 处的重力位势值。

图 4 给出 $p=700$ 毫巴的等压面上 ϕ 随 r 的分布，计算也同样表明理论与实际定性一致。计算中，除前面用过的数值外，取 $\phi_m=3000$ 位势米，而 $\bar{\omega}_m$ 的数值取为 3×10^{-4} 秒⁻¹

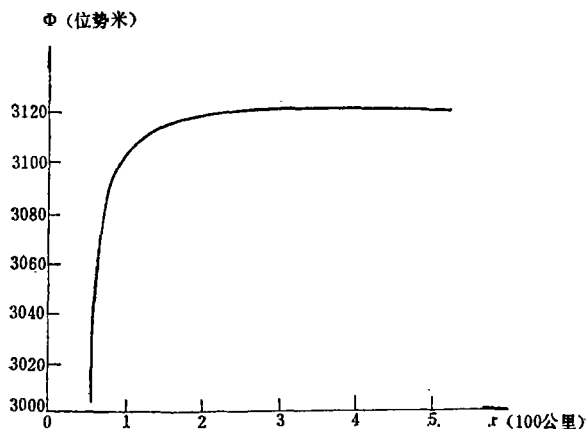


图 4 700 毫巴等压面重力位势 ϕ 的径向分布

四、扰 动 解

假设方程组(1)中任一参量 $x(r, \theta, z, t)$ (x 可以是 u, v, w, p, ρ, T , 而 q 认为是已知的)是其基态场 $\bar{x}$ 和迭加在 $\bar{x}$ 上的小扰动场 x' 构成, 即

$$x = \bar{x} + x' \quad (18)$$

且 $|x'| \ll |\bar{x}|$

将(18)代入(1), 则忽略二阶微量项后, 扰动量(带“'”的量)满足

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \left(\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial r} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + \bar{\omega} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - (f + 2\bar{\omega})v' &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial r} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \left(\frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{v'}{r} \right) + \bar{\omega} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \left(f + 2\bar{\omega} + r \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} \right) u' &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial r} + \bar{\omega} \frac{\partial w'}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\rho} u' + r \bar{u} \rho') + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{\rho} v' + \bar{\omega} r \rho') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w') &= 0 \\ p' &= R(\bar{\rho} T' + \rho' \bar{T}) \\ c_p \left[\frac{\partial T'}{\partial t} + \left(\bar{u} \frac{\partial T'}{\partial r} + u' \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + \bar{\omega} \frac{\partial T'}{\partial \theta} + w' \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right] - \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial p'}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{u} \frac{\partial p'}{\partial r} + u' \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right) + \bar{\omega} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + w' \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right] = -L \left(u' \frac{\partial \bar{q}}{\partial r} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

对上述线性化的扰动方程组可求如下形式的解

$$x'(r, \theta, z, t) = \hat{x}(r, z) \exp i(\omega t + kr - m\theta + nz) \quad (20)$$

其中 ω 为圆频率, k, n 分别为 r 和 z 方向的波数, m 为 θ 方向的角波数, 也代表等位相线的螺旋臂数, 这样做意味着在 θ 方向波以角速度

$$\Omega_\theta \equiv \frac{\omega}{m} \quad (21)$$

绕台风中心旋转, 同时认为 x' 在径向和垂直方向也是振动的。

假定 $\hat{x}(r, z)$ 是缓变函数, 将 (20) 代入 (19), 且注意 $f + 2\bar{\Omega} + r \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial r} = 0$, 同时近似有 $\frac{\partial \bar{x}}{\partial r} \sim \frac{\bar{x}}{r}$, 则在紧卷涡旋 ($|kr| \gg 1$) 的条件下得到

$$\begin{cases} i\nu\hat{u} - (f + 2\bar{\Omega})\hat{v} = -ik(\hat{p}/\bar{\rho}) \\ i\nu\hat{v} = \frac{im}{r}(\hat{p}/\bar{\rho}) \\ i\nu\hat{w} = -in(\hat{p}/\bar{\rho}) - g(\hat{p}/\bar{\rho}) \\ i\nu(\hat{p}/\bar{\rho}) + i\left(k\hat{u} - \frac{m}{r}\hat{v} + n\hat{w}\right) + \frac{\partial \ln \bar{\rho}}{\partial z}\hat{w} = 0 \\ \hat{p}/\bar{\rho} = R\hat{T} + R\bar{T}(\hat{p}/\bar{\rho}) \\ i\nu c_p \hat{T} - i\nu(\hat{p}/\bar{\rho}) + c_p(\Gamma_m - \Gamma)\hat{w} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

式中

$$\nu = \omega - m\bar{\Omega} + k\bar{u} \quad (23)$$

而

$$\Gamma \equiv -\partial \bar{T} / \partial z, \Gamma_d \equiv g/c_p, \Gamma_m = \Gamma_d + \frac{L}{c_p} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \quad (24)$$

Γ 为垂直减温率, Γ_d 为干绝热过程的垂直减温率, Γ_m 为湿绝热过程的垂直减温率。

(22) 之第一、二、三、五、六诸式进行运算, 可将 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}/\bar{\rho}$ 都用 $\hat{p}/\bar{\rho}$ 表示

$$\begin{cases} \hat{u} = -\frac{[kv + im(f + 2\bar{\Omega})/r]}{\nu^2}(\hat{p}/\bar{\rho}) \\ \hat{v} = \frac{m}{\nu r}(\hat{p}/\bar{\rho}) \\ \hat{w} = -\frac{\nu(nc_L^2 - ig)}{c_L^2(\nu^2 - N^2)}(\hat{p}/\bar{\rho}) \\ \hat{p}/\bar{\rho} = \frac{\nu^2 + in c_L^2 N^2/g}{c_L^2(\nu^2 - N^2)}(\hat{p}/\bar{\rho}) \end{cases} \quad (25)$$

其中

$$c_L = (\gamma R \bar{T})^{1/2}, \quad (\gamma = c_p/c_v) \quad (26)$$

为 Laplace 声速。

$$N \equiv \left[\frac{g}{\bar{T}} (\Gamma_m - \Gamma) \right]^{1/2} \quad (27)$$

为 Brunt-Väisälä 频率

将(25)一併代入到(22)的第四式, 其虚部满足

$$k^2 + \frac{m^2}{r^2} = \frac{v^2(v^2 - n^2 c_L^2 - g\sigma)}{c_L^2(v^2 - N^2)} \quad (28)$$

其中

$$\sigma = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \quad (29)$$

(28) 包含声波和重力惯性内波, 排除其中包含的声波, 并注意 $g\sigma < n^2 c_L^2$ (取厚度 $\bar{H} = 10$ 公里, $n = \frac{\pi}{\bar{H}} \approx 3 \times 10^{-4} \text{米}^{-1}$, $c_L = 330$ 米/秒, $\sigma = 10^{-4} \text{米}^{-1}$, $g \approx 10$ 米/秒², 则 $n^2 c_L^2 \approx 10^{-2} \text{秒}^{-2}$, $g\sigma \approx 10^{-3} \text{秒}^{-2}$), 则得到

$$v^2 = \alpha^2 N^2 \quad (30)$$

其中

$$\alpha = \left(\frac{k^2 + \frac{m^2}{r^2}}{k^2 + \frac{m^2}{r^2} + n^2} \right)^{1/2} \quad (31)$$

对紧卷涡旋,

$$\alpha \approx \left(\frac{k^2}{k^2 + n^2} \right)^{1/2} \quad (32)$$

将(23)代入到(30), 求得频散关系为

$$\omega = m\bar{\Omega} - k\bar{u} \pm \alpha N \quad (33)$$

将上式代入到(21), 求得在 θ 方向波的角速度为

$$\Omega_\theta = \bar{\Omega} - \frac{k}{m} \left(\bar{u} \pm \frac{\alpha}{k} N \right) \quad (34)$$

(33) 中 $\bar{\Omega}$ 内含有 Coriolis 参数的作用(见(8)), N 是层结的作用(见(27)), 且一般 $\alpha N > m\bar{\Omega}$, 由此可见, 对台风而言, 重力惯性内波, 特别是重力内波起主要作用, 并且 Coriolis 参数起稳定作用, 而不稳定层结 ($\Gamma > \Gamma_m$, $N^2 < 0$) 是台风发展的主要因素。这方面, 我们将另文详说。

五、台风的螺旋形式

由(20)看到, 只要 $\hat{x}(r, z)$ 是缓变函数, 则台风中的重力惯性内波的等位相线近似满足

$$\omega t + kr - m\theta + nz = \text{常数} \quad (35)$$

在圆频率一定时, 对固定时刻, 在 $z = \text{常数}$ 的平面上, 等位相线是

$$\theta = \frac{k}{m} r + \text{常数}, (z = \text{常数}) \quad (36)$$

它表征的是水平面上重力惯性内波的一组紧卷螺旋线。

同样, 在 $r = \text{常数}$ 的柱面上的紧卷螺旋线满足

$$\theta = \frac{n}{m}z + \text{常数}, (r = \text{常数}) \quad (37)$$

正由于此, 我们说台风中的重力惯性内波是一种螺旋波。也正由于此, 在(20)所表征的扰动解中, m 也表示螺旋线的臂数。

我们重点分析(36), 因 $m > 0$, 则当 $k > 0$ 时, θ 随 r 的增加而增加, 这是导式螺旋线; 而当 $k < 0$ 时, θ 随 r 的增加而减小, 这是曳式螺旋线。同样, (37)表明 $n > 0$ 时是导式(或称右旋), $n < 0$ 时是曳式(或称左旋)

为了具体求出台风中螺旋线的图样, 我们利用(34)解出 k/m , 代入到(36)得到

$$\theta = -\frac{(\Omega_\theta - \bar{\Omega})r}{\bar{u} \pm \frac{\alpha}{k}N} + \text{常数} \quad (38)$$

若令

$$c_0 \equiv \frac{\alpha}{|k|}N \quad (39)$$

c_0 表征重力内波在 r 方向的传播速度, 平均讲 $c_0 = 28$ 米/秒, ($N \approx 10^{-2}$ 秒 $^{-1}$, $\frac{\alpha}{|k|} \approx \sqrt{\frac{1}{k^2 + n^2}} = \frac{1}{\varepsilon n}$, $1 < \varepsilon < \sqrt{2}$, 则 $c_0 = 24 - 32$ 米/秒)。又因台风中 $\Omega_\theta > \bar{\Omega}$, 在 $r \gg a$ 处, $\Omega_\theta \gg \bar{\Omega}$, 所以, (38)简化为

$$\theta = -\frac{\Omega_\theta r}{\bar{u} \pm c_0} + \text{常数} \quad (40)$$

取 $\Omega_\theta = 3 \times 10^{-4}$ 秒 $^{-1}$, $c_0 = 25$ 米/秒, $\bar{u}$ 按前面的计算, 取常数 = 0, 则求得 θ 与 r 的对应关系见下表 1。

表 1 螺旋线 θ 与 r 的对应关系

r (公 里)	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
θ (对应 $\bar{u} + c_0$)	$-31^\circ 31'$	$-65^\circ 19'$	$-99^\circ 42'$	$-134^\circ 4'$	$-168^\circ 27'$	$-202^\circ 50'$	$-237^\circ 12'$	$-271^\circ 35'$	$-305^\circ 57'$	$-340^\circ 55'$
θ (对应 $\bar{u} - c_0$)	$38^\circ 23'$	$72^\circ 11'$	$106^\circ 34'$	$140^\circ 56'$	$175^\circ 19'$	$209^\circ 42'$	$244^\circ 05'$	$278^\circ 27'$	$312^\circ 50'$	$347^\circ 13'$

图 5 和图 6 分别给出了 $m=2$ 和 $m=4$ 的相应于表 1 两种不同情况的螺旋线的图形。 $m=2$ 相当于相邻两条螺旋线位相差 180° , $m=4$ 相当于相邻两条螺旋线位相差 90° , 图 5 a, 6 a 对应曳式(相应于 $\bar{u} + c_0$), 图 5 b, 6 b 对应导式(相应于 $\bar{u} - c_0$)

这个图样与我们在北半球观测到的台风螺旋云带的结构是很接近的。特别是图 5 a 和图 6 a 的曳式螺旋结构更为常见。这说明台风螺旋结构的形成是台风这种中尺度系统中重力惯性内波(特别是重力内波)的作用所致。而且因为在台风中的任一扰动形成后, 其振动向四周传播总是沿着以扰源为极点的径向传播的, 传播速度是 $\bar{u} + c_0$, 所以, 我们见到的螺旋线总是曳式而不是导式。

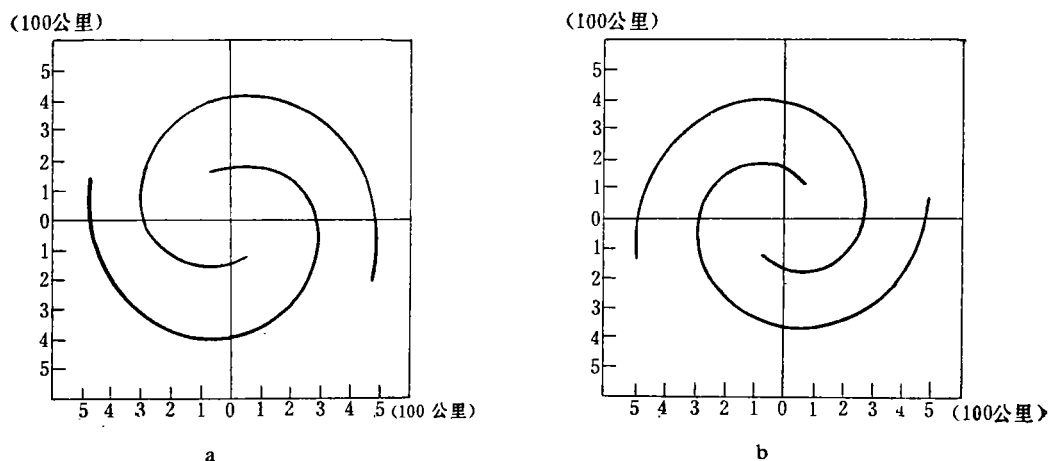


图 5 $m=2$ 时台风螺旋图样
(a. 曳式, b. 导式)

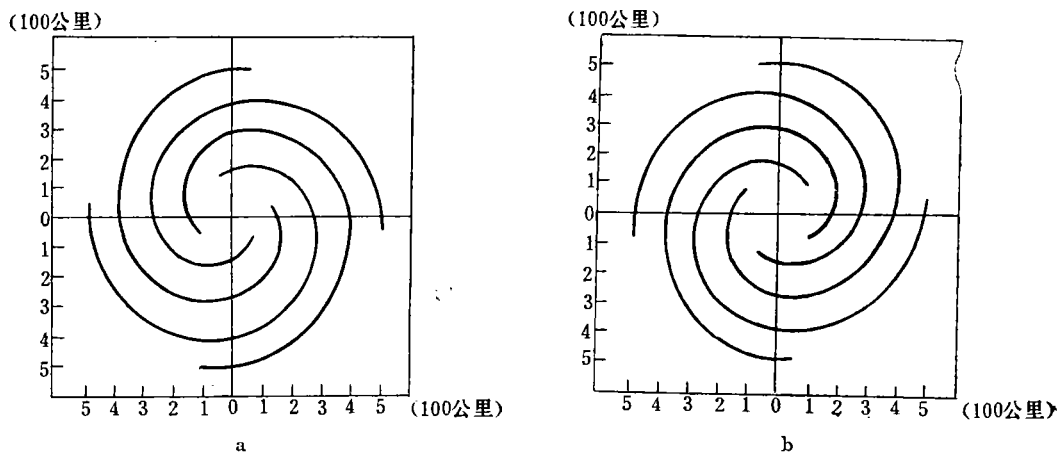


图 6 $m=4$ 时台风螺旋图样
(a. 曳式, b. 导式)

设螺旋线与半径为 r 的圆切线间的夹角(称为螺旋线的倾角)为 β (见图 7), 则它满足

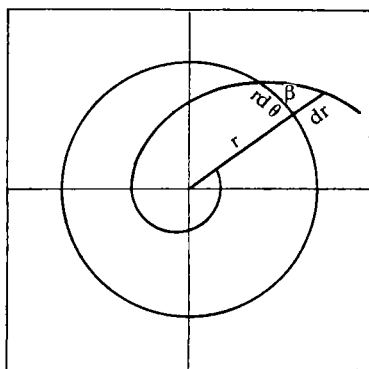


图 7 螺旋线的倾角

$$\tan \beta = \left| \frac{dr}{r d\theta} \right|_{\text{位相=常数}} = \frac{m}{|k| r} \quad (41)$$

由频散关系(33)或(34)可以算出台风中重力惯性螺旋波沿 r 方向的波长, 也就是螺旋臂之间的间距为

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{m}{|k|} \approx \frac{2\pi}{m} \left| \frac{\bar{u} \pm c_0}{\Omega_\theta} \right| \quad (42)$$

表 2 列出了曳式螺旋的 β 值和相应于 $m=2$ 和 $m=4$ 的 λ 值。计算表明, 除紧靠近台风眼处而外, β 值都小于 45° , 而且随 r 的增加, β 值减小, 在台风边缘 $\beta \approx 10^\circ$ 。同时, 除靠近台风眼处 λ 稍大外, 几乎是

等间距的。 $m=2$ 时, 平均 $\lambda=220$ 公里; $m=4$ 时, 平均 $\lambda=110$ 公里, 这些也都与台风实际状况相近。

表 2 曳式螺旋线倾角 β 与螺旋臂间距 λ

r (公里)	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
倾角 β	$61^{\circ}23'$	$41^{\circ}11'$	$29^{\circ}52'$	$23^{\circ}8'$	$18^{\circ}47'$	$15^{\circ}46'$	$13^{\circ}34'$	$11^{\circ}54'$	$10^{\circ}37'$	$9^{\circ}32'$
螺旋臂间距 λ (100 公里)	$m=2$	2.38	2.25	2.21	2.19	2.17	2.16	2.15	2.15	2.14
	$m=4$	1.19	1.13	1.11	1.10	1.09	1.08	1.08	1.07	1.07

六、螺旋线的形式与波位相速间的关系

由 (36) 看到, 在水平面上台风螺旋线是曳式还是导式决定于 k/m 的符号, 而 k, m 分别为沿 r 方向和沿 θ 方向的波数和角波数, 因而, 水平面上螺旋线是曳式还是导式决定于波沿 r 方向和 θ 方向的相速度。同样, 由 (37) 看到, 在柱面上的螺旋线决定于 n/m 的符号, 而 n 为波沿 z 方向的波数, 因而柱面上螺旋线的形式决定于波沿 z 方向和 θ 方向的相速度。

引入波在 r, θ, z 三个方向上的相速度

$$c_r = -\omega/k, \quad c_\theta = \Omega_\theta \cdot r = r \cdot \omega/m, \quad c_z = -\omega/n \quad (43)$$

则 (36), (37) 两式分别改写为

$$\theta = -\frac{\Omega_\theta}{c_r} r + \text{常数}, \quad (z = \text{常数}) \quad (44)$$

$$\theta = -\frac{\Omega_\theta}{c_z} z + \text{常数}, \quad (r = \text{常数}) \quad (45)$$

(44) 表明, 水平面上的台风螺旋图样是曳式还是导式取决于波沿切向的相角速度 Ω_θ 与波沿 r 方向的相速度 c_r 之比值 Ω_θ/c_r 的符号。当 $\frac{\Omega_\theta}{c_r} < 0$ 时是导式, 而当 $\frac{\Omega_\theta}{c_r} > 0$ 时是曳式。实际观测到的北半球台风螺旋线都为曳式说明, Ω_θ 与 c_r 必须同号。这意味着北半球台风曳式螺旋要求螺旋图样 (它表征台风中的重力惯性内波) 必须逆时针且向外运动, 这与 Kurinara^[2] 的分析结果一致, 也与实际台风螺旋雨带的运动相符。

(45) 也可以作与 (44) 类似的分析: 当 $\Omega_\theta > 0$ 时, 右旋螺旋要求 $c_z < 0$, 左旋螺旋要求 $c_z > 0$ 。

七、螺旋波的频散

(33) 代入到 (43) 得到 c_r, c_θ, c_z 的具体表达式

$$\begin{cases} c_r = -\frac{m}{k} \bar{\omega} + \bar{u} \mp \frac{\alpha}{k} N \\ c_\theta = \left(\bar{\omega} - \frac{k}{m} \bar{u} \pm \frac{\alpha}{m} N \right) r \\ c_z = -\frac{m}{n} \bar{\omega} + \frac{k}{n} \bar{u} \mp \frac{\alpha}{n} N \end{cases} \quad (46)$$

同样, 由(43)可求得螺旋波沿 r, θ, z 三个方向的群速度为

$$\begin{cases} c_{gr} \equiv -\frac{d\omega}{dk} = \bar{u} \mp \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{kn^2}{(k^2+n^2)^2} N \\ c_{g\theta} \equiv r \frac{d\omega}{dm} = r \bar{\omega} = \bar{v} \\ c_{gz} \equiv -\frac{d\omega}{dn} = \pm \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{k^2 n}{(k^2+n^2)^2} N \end{cases} \quad (47)$$

由(46), (47)两式很易得到

$$\begin{cases} kc_r - nc_z = 0 \\ k(c_{gr} - \bar{u}) + nc_{gz} = 0 \end{cases} \quad (48)$$

则有

$$\frac{c_{gr} - \bar{u}}{c_{gz}} = -\frac{c_r}{c_z} \quad (49)$$

它说明 $\frac{c_{gr} - \bar{u}}{c_{gz}}$ 与 $\frac{c_r}{c_z}$ 的符号相反。

下面, 我们就常见的曳式螺旋波的频散情况作简单的分析

因曳式螺旋 $c_r > 0$, 我们就取

$$c_r = \bar{u} - \frac{\alpha}{k} N = \bar{u} + c_0 \quad (50)$$

式中 $k < 0$, 相应地

$$c_{gr} = \bar{u} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{kn^2}{(k^2+n^2)^2} N = \bar{u} + \frac{n^2}{k^2+n^2} c_0 \quad (51)$$

由(50), (51)求得

$$\frac{c_{gr} - \bar{u}}{c_r - \bar{u}} = \frac{n^2}{k^2 + n^2} \quad (52)$$

根据北半球曳式螺旋的特点, (50), (51)和(52)说明 c_{gr} 与 c_r 同号, 而且 $c_{gr} < c_r$ 。它表示在曳式台风螺旋中, 能量向外输送, 但其输送速度小于螺旋波的径向速度。这一方面可以解释螺旋波的径向生长, 但也说明这种径向生长受到抑制以致能量还是集中到螺旋带内。所以, 台风只要有充足的水汽供给, 由台风中心产生的扰动就可以维持台风的螺旋结构。

由(49)看到, 水平面上的曳式台风螺旋($c_r > 0$, $c_{gr} > 0$) 若在垂直方向是右旋的, ($c_z < 0$), 则 $c_{gz} > 0$, 且再根据(52)有

$$\left| \frac{c_{gz}}{c_z} \right| \approx \frac{n^2}{k^2 + n^2} \quad (53)$$

因而 $|c_{gz}| < |c_z|$ 。同样, 若水平面上的曳式台风螺旋($c_r > 0$, $c_{gr} > 0$) 在垂直方向上是左旋的($c_z > 0$), 则 $c_{gz} < 0$, 且也有 $|c_{gz}| < |c_z|$ 。

八、结 论

综上所述, 我们认为, 台风螺旋结构的形成是台风中的重力惯性内波, 特别是重力

内波的作用所致。北半球台风螺旋结构是曳式，它环绕台风眼逆时针且向外运动，倾角小于 45° ，且由中心向外倾角减小。而螺旋臂间距随旋臂数 m 的增大而减小，二旋臂结构平均为 220 公里，四旋臂结构平均为 110 公里，且台风螺旋波也有频散作用。

本文附带讨论了台风的基本流场、温度场、气压场的径向分布，它们都定性与实际一致。

至于台风螺旋形成的细微结构，有待进一步探讨。

本文承谢义炳教授指正，并承肖文俊同志描图，一併致谢。

参 考 文 献

- [1] Anthes, R. A., Diagnostic Studies of Spiral Rainbands in a Nonlinear Hurricane Model, *J. Atmos.*, **33**, 959—975, 1976.
- [2] Kurinara, Y., On the Development of Spiral Bands in a Tropical Cyclone, *J. Atmos.*, **33**, 940—958, 1976.
- [3] Adbullah, A. J., The Spiral bands of a hurricane, A possible dynamic explanation, *J. Atmos.*, **23**, 367—375, 1966.
- [4] Anthes, R. A., The Development of asymmetries in a three-dimensional numerical model of the tropical cyclone. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 461—476, 1972.
- [5] 刘式适、杨大升，地球大气行星波的螺旋结构，*气象学报*，**37** (1) 14—27, 1979.
- [6] Kuo, H. L., Dynamics of connective Vortices and Eye formation. *The Atmosphere and the Sea in motion. The Rossby memorial volume.* 413—424, 1959.
- [7] 陈联寿、丁一汇，西太平洋台风概论，科学出版社，1979.
- [8] 王 水、方励之，太阳风中的大尺度涡旋波，*中国科学*，第 4 期，373—383, 1979.

THE SPIRAL STRUCTURE OF THE TROPICAL CYCLONE

Liu Shi-kuo

Yang Da-sheng

(Department of Geophysics, Beijing University)

Abstract

In this paper, starting from the equations describing tropical cyclone, the spiral structure of the tropical cyclone is discussed and the flow pattern is described.

It shows that the formation of spiral structure is due to the action of internal gravity-inertia waves, particularly internal gravity waves. The spiral form is connected with the phase velocity of waves. The "trailing" spiral structure in the Northern Hemisphere demands that the spiral lines move counter-clockwise and outward. The angle with which a spiral line intersects with a circle of radius r is ordinarily less than 45° , at the edge of tropical cyclone it is about 10° . The distance between the spiral "arms" is about 220 km for $m=2$, 110 km for $m=4$. The spiral waves of the tropical cyclone are dispersive. In the "trailing" spiral, c_{gr} and c_r are always positive, and $c_{gr} < c_r$. It is found that, if the water vapor is enough and latent heat is more than enough, the tropical cyclone may maintain.