

层结大气中重力惯性波的非线性周期解*

赵瑞星

(总参气象局)

提 要

本文在动量无辐散近似下的层结大气中, 考虑密度空间分布的不均匀性引入非线性项, 并假设解为行波形式, 得到了一个二阶非线性系统。应用本系统不仅可以得到刘式适等(1984)所得到的一切结果, 而且可以证明一次近似系统存在周期解时, 非线性系统也存在周期解, 且避免了应用级数展开时所带来的数学问题。文中还讨论了非线性系统的一系列近似解。

一、引 言

层结大气中重力惯性波的非线性问题, 已有不少讨论文章, 但多数是讨论Boussinesq近似下的浅对流模式或静力平衡近似下的 p 坐标模式^[1-3]。然而, 层结大气中的中尺度系统往往是非静力平衡的深厚系统, 象爬线, MCC等。因此讨论重力惯性波应考虑非静力平衡的深对流模式。张可苏^[4]的研究表明, 适合中尺度系统的模式是动量无辐散模式, 此模式在波长较短时有比静力平衡模式好得多的特性。用此模式, 我们不考虑声波的影响, 设存在波动解, 得到一个自治的二阶非线性方程组。从此方程组出发, 我们可以得到文献[2]的一切结果, 且此方程组可化为一个可应用Poincare形式级数法^[5]证明非线性周期解的存在性的特殊系统, 借用我们已证明的结论得到了无基流垂直切变时非线性重力惯性波存在周期解, 并得到了一系列的近似解。

二、基本方程

在准动量无辐散近似下, 层结大气中无摩擦的二维运动的基本方程为:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial u'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} - f v' + \bar{u}_z w' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial v'}{\partial x} + w' \frac{\partial v'}{\partial z} + f u' = 0 \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\bar{\rho}} \rho' \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \theta'}{\partial z} + \frac{N^2}{g} w' = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} w'}{\partial z} = 0 \\ \rho' = -\frac{\bar{\rho}}{\theta_0} \theta' \quad (\text{取 } \bar{\theta} \approx \theta_0)\end{array}\right. \quad (1)$$

* 本文于1988年10月5日收到, 1989年2月14日收到最后修改稿。

其中 N 为 Brunt-Väisälä 频率, f 为 Coriolis 参数, θ_0 为 θ 的特征值。

取 f 为常数, (1) 式是表征层结切变流中的非线性重力惯性波方程组。

为了讨论方便, 令 $(u, v, w, \theta) = \bar{\rho}(u', v', w', g/\theta_0 \cdot \theta')$, $p = p'$, 方程 (1) 化为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + w u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \\ - f v + \bar{u}_x w + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) v + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + w v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) + f u = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) w + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + w^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \theta = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \theta + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + w \theta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) + N^2 w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

设 (2) 的波动解为

$$\begin{cases} u = U(\tau), \quad v = V(\tau), \quad w = W(\tau) \\ p = P(\tau), \quad \theta = \Theta(\tau) \\ \tau = kx + nz - \sigma t \end{cases} \quad (3)$$

其中 k, n 分别为 x, z 方向上的波数, σ 为圆频率。

将 (3) 代入 (2) 得到

$$\begin{cases} (-\sigma + k\bar{u})U' + \frac{1}{\bar{\rho}}(kU + nW)U' + \alpha WU - fV + \bar{u}_x W + kP' = 0 \\ (-\sigma + k\bar{u})V' + \frac{1}{\bar{\rho}}(kU + nW)V' + \alpha WV + fU = 0 \\ (-\sigma + k\bar{u})W' + \frac{1}{\bar{\rho}}(kU + nW)W' + \alpha W^2 + nP' - \Theta = 0 \\ (-\sigma + k\bar{u})\Theta' + \frac{1}{\bar{\rho}}(kU + nW)\Theta' + \alpha W\Theta + N^2 W = 0 \\ kU' + nW' = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\alpha = \frac{\partial}{\partial z}(1/\bar{\rho})$ 。

将 (4) 之第五式对 τ 积分一次且取积分常数为零可得连续方程在平面波假定下的变形形式

$$kU + nW = 0 \quad (5)$$

其物理意义是水平通量与垂直通量成正比。

将 (5) 代入 (4), 且消去 P' 有

$$\begin{cases} \gamma(k^2 + n^2)W' + \alpha(k^2 + n^2)W^2 + nkfV - nk\bar{u}_x W - k^2\Theta = 0 \\ \gamma V' + \alpha WV - \frac{n}{k}fW = 0 \\ \gamma\Theta' + \alpha W\Theta + N^2 W = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\gamma = k\bar{u} - \sigma$, 这是在假定积分常数为零时得到的方程组, 如果积分常数不为零也可得到形式相同的方程组, 所不同的是 γ 变为 $\gamma' = \gamma + \beta_0/\bar{\rho}$, 第一式中 W 的系数变为 $n(k\bar{u}_x$

$+a\beta_0$), β_0 为积分常数。化为单变量方程为

$$W'' + 3 \frac{\alpha}{\gamma} W W' - \frac{nk\bar{u}_z}{\gamma K^2} W' - \frac{\alpha nk\bar{u}_z}{\gamma^2 K^2} W^2 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} W^3 + \frac{n^2 f^2 + k^2 N^2}{\gamma^2 K^2} W = 0 \quad (7)$$

其中 $K^2 = k^2 + n^2$ 。

令 $W' = g, A = \frac{nk}{\gamma K^2} \bar{u}_z,$

$$B = \frac{n^2 f^2 + k^2 N^2}{\gamma^2 K^2}, C = \alpha/\gamma,$$

那么(7)化为 ($D = AC$)

$$\begin{cases} W' = g \\ g' = Ag - BW - 3CWg + DW^2 - C^2W^3 \end{cases} \quad (8)$$

方程(8) 就是我们要讨论的自治二阶非线性方程组。

三、平衡点及其附近的拓扑结构

1. 平衡点

系统(8) 的平衡点可由下列方程得到

$$\begin{cases} g = 0 \\ Ag - BW - 3CWg + DW^2 - C^2W^3 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

把(9) 第一式代入第二式可得

$$-BW + DW^2 - C^2W^3 = 0 \quad (10)$$

$C \neq 0$ 时求得 $W_1 = 0, W_2 = \frac{D}{2C^2} \pm \frac{\sqrt{D^2 - 4BC^2}}{2C^2}$ 。因此系统(8) 有三个平衡点 $(0, 0)$,

$$\left(\frac{D}{2C^2} + \frac{\sqrt{D^2 - 4BC^2}}{2C^2}, 0 \right) \text{ 和 } \left(\frac{D}{2C^2} - \frac{\sqrt{D^2 - 4BC^2}}{2C^2}, 0 \right)。$$

2. 平衡点附近的拓扑结构

由于非零平衡点可化为 $(0, 0)$ 平衡点讨论其附近的拓扑结构, 因此我们在此仅讨论 $(0, 0)$ 点附近的拓扑结构。

系统(8) 的一次近似系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -B & A \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -B & A-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

即

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0 \quad (11)$$

$$\lambda = A/2 \pm \sqrt{A^2 - 4B}/2 \quad (12)$$

由前假设知

$$A = nk\bar{u}_z / \gamma K^2, \quad B = (n^2 f^2 + k^2 N^2) / \gamma^2 K^2$$

如果取水平特征尺度为 $L = \sqrt{n^2 H^2 / k^2}$, Rossby 变形半径 $L_0 = \sqrt{-N^2 H^2 / f^2}$, 那么

$$B = \frac{k^2 f^2}{\gamma^2 K^2 H^2} (L^2 - L_0^2) \quad (13)$$

其中 H 表示大气的平均厚度。这样我们可以在 $(\bar{u}_z, L^2 - L_0^2)$ 参数平面上表示出平衡点 $(0, 0)$ 附近解的特征。

1) $\gamma > 0$ 时 $(0, 0)$ 点附近解的特征

$\gamma = k(\bar{u} - C) > 0$, 说明 $C < \bar{u}$, 这时有两种情况: $a, 0 < C < \bar{u}$, 是低速传播的重力波, 这种波动在较低纬度是有可能出现的。 $b, C < 0$, 这是与基本气流反向传播的重力惯性波。出现 a, b 两种情况时, $(0, 0)$ 点附近的拓扑结构如图 1。

2) $\gamma < 0$ 时, $(0, 0)$ 点附近解的特征

$\gamma = k(\bar{u} - C) < 0$, 即 $C > \bar{u}$, 此时解在 $(0, 0)$ 点附近的特征如图 2。

由此可看出在同样的切变大气中, 波速不同的波动其稳定性可能是不同的。

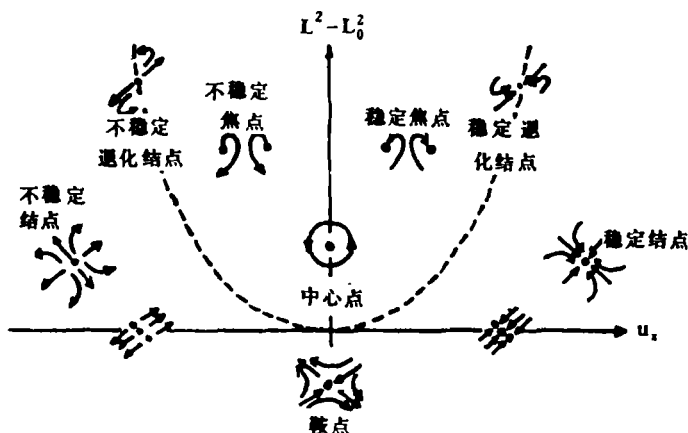


图 1 $\gamma > 0$ 时, $(0, 0)$ 点附近的拓扑结构

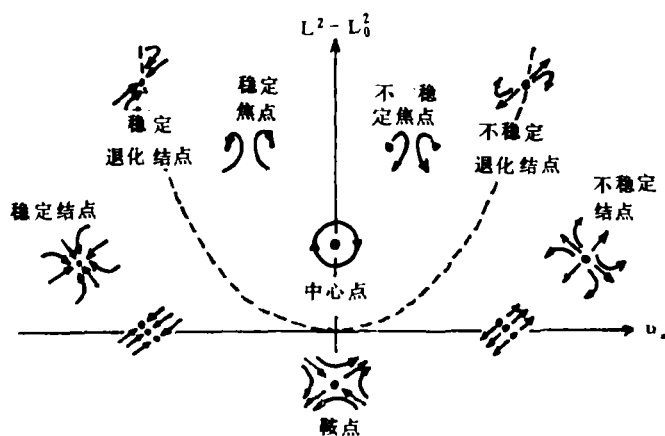


图 2 $\gamma < 0$ 时, $(0, 0)$ 点附近的拓扑结构

值得注意的是上面得到的解的特性是一次近似的结果, 对于本文所讨论的系统而言, 除中心外的五种情况此结果均可推广到非线性情况。平衡点(0,0)是一次近似的中心时, 加上非线性项后的性质要由所加的非线性项来决定, 这种情况正好对应 $A=0$ 时的情况, 在积分常数 $\beta_0=0$ 时, $A=0$ 相当于 $\bar{u}_z=0$, 积分常数 $\beta_0 \neq 0$ 时 $A=0$ 相当于 $\bar{u}_z=-\alpha\beta_0/k$ 。下面我们仅就 $\beta_0=0$ 的情况作一讨论。因此, 我们将讨论无基流垂直切变时, 平衡点(0,0)附近解的性质。

四、基流无垂直切变时, 平衡点(0, 0)附近解的性质

基流无垂直切变, 即 $\bar{u}_z=0$, 那么, $A=0, D=0$, 系统(8)变为

$$\begin{cases} W' = g \\ g' = -BW - 3CWg - C^2W^2 \end{cases} \quad (14)$$

这显然是一个一次近似为中心的系统, 我们可用Poincare形式级数法来决定它在(0,0)点附近解的性质。首先作变换

$$\begin{cases} W = x \\ g = -\sqrt{B}y \\ \tau_1 = \sqrt{B}\tau \end{cases} \quad (15)$$

那么, (14) 式化为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - 3\frac{C}{\sqrt{B}}xy + \frac{C^2}{B}x^2 \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\dot{x} = dx/d\tau_1, \dot{y} = dy/d\tau_1$ 。

系统(16)是一特殊非线性系统, 我们已在《一类特殊系统的非线性周期解》^[6]一文中证明了这类系统非线性周期解的存在性, 在此我们将直接引用证明了的结论, 系统(16)存在非线性周期解, 平衡点(0,0)为系统(16)的中心。

五、非线性近似解

1. 一次近似解

系统(8)的一次近似方程为

$$\begin{cases} W' = g \\ g' = Ag - BW \end{cases} \quad (17)$$

即

$$W'' - AW' + BW = 0$$

前面已求得特征方程为

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0$$

特征根为

$$\lambda = A/2 \pm \sqrt{A^2 - 4B}/2$$

可见, 可由特征根的性质确定一次近似的几组特解。

1) λ 为实数

$$\begin{cases} W = W_0 e^{\lambda \tau} \\ g = \lambda W_0 e^{\lambda \tau} \end{cases} \quad (18)$$

其中 W_0 为 $W(\tau=0)$ 。所以有

$$g = \lambda W \quad (19)$$

它表征的是过鞍点或结点的直线。

2) 特征根为复数

$$\lambda = \alpha \pm i\beta \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0) \quad (20)$$

方程的解为

$$\begin{cases} W = W_0 e^{\alpha \tau} \cos \beta \tau \\ g = W_0 e^{\alpha \tau} (\alpha \cos \beta \tau - \beta \sin \beta \tau) \end{cases} \quad (21)$$

3) λ 为纯虚根

$$\lambda = \pm i\beta \quad (\beta \neq 0) \quad (22)$$

这时相当于特征方程中 $A=0$, 即 $\bar{u}_z=0$, 因此, 是无基流垂直切变时的情况, 方程的解可以写成

$$\begin{cases} W = W_0 \cos \beta \tau \\ g = -\beta W_0 \sin \beta \tau \end{cases} \quad (23)$$

或

$$g^2 + \beta^2 W^2 = \beta^2 W_0^2 \quad (24)$$

其中

$$\beta^2 = B = \frac{n^2 f^2 + k^2 N^2}{K^2 (k\bar{u} - \sigma)^2} \quad (25)$$

因此 $\beta^2 \geq 0$, 即 $B \geq 0$ 时, λ 为纯虚根, 相路为一族椭圆。

2. 二级近似的解

系统(8)的二级近似方程为

$$\begin{cases} W' = g \\ g' = Ag - BW - 3CWg + DW^2 \end{cases} \quad (26)$$

1) 由前知 λ 为实根时 $W = g/\lambda$, 把此关系式代入(26)第二式有

$$W' = AW - \frac{B}{\lambda} W + \left(\frac{D}{\lambda} - 3C \right) W^2 \quad (27)$$

令 $a = A - \frac{B}{\lambda} = \lambda$, $b = \frac{D}{\lambda} - 3C$, 解(27)得

$$W = -\frac{a}{b} \left(1 + C \tanh \frac{\lambda}{2} \tau \right) \quad (28)$$

由此可见, 考虑非线性项 (二次近似) 后, 鞍点或结点附近的解是一不连续解, 且当 $\lambda \rightarrow 0$ 时 $W \rightarrow \infty$ 。从(12)式知当 $B \rightarrow 0$ 时 $\lambda \rightarrow 0$ 。欲使 $B \rightarrow 0$, 须有 $n^2 f^2 + k^2 N^2 \rightarrow 0$ 或 $K^2 (k\bar{u} - kC)^2 \rightarrow \infty$ 。 $n^2 f^2 + k^2 N^2 \rightarrow 0$ 对应于不稳定性转换时解的不连续变化, $K^2 (k\bar{u} - kC)^2 \rightarrow \infty$ 对应于高速重力波的不稳定发展。

2) λ 为纯虚根时, $A=0$ 可知 $D=0$

$$g^2 + \beta^2 W^2 = \beta^2 W_0^2$$

代入(26)第二式有 (略去三次项)

$$g'' = -Bg - 6Cg^2 + 3CBW_0^2 \quad (29)$$

解(29)得

$$g(\tau) = g_2 S n^2 \sqrt{\alpha(g_1 - g_3)} \tau + g_1 \quad (30)$$

其中 $\alpha = 4C$, g_1, g_2, g_3 分别为三次多项式 $G(g)$ 的三个零点

$$G(g) = g^3 + \frac{B}{4C}g^2 - \frac{6BCW_0^2}{4C}g + g_0$$

这说明加上非线性项后, 中心附近的解由椭圆变成了椭圆函数。由关系式(24)可知 $W(\tau)$ 也为椭圆函数:

$$W(\tau) = \sqrt{W_0^2 - g^2(\tau)/\beta^2} \quad (30)'$$

$$w(x, z, t) = \sqrt{W_0^2 - (g_1 + g_2 S n^2 \sqrt{\alpha_1} (kx + nz - \sigma t)^2 / \beta^2), \quad \alpha_1 = \alpha(g_1 - g_3)} \quad (30)''$$

在某种意义上, 上式可以称之为重力惯性波的非线性周期解。

3. 三次近似解

三次近似方程也就是原方程

$$\begin{cases} W' = g \\ g' = Ag - BW - 3CWg + DW^2 - C^2W^3 \end{cases} \quad (31)$$

1) λ 为实根时, 把 $g = \lambda W$ 代入(31)第二式有

$$W' = aW + bW^2 - c^2W^3 \quad (32)$$

(式中 $a = (A\lambda - B)/\lambda = \lambda$, $b = (D - 3C\lambda)/\lambda$, $c^2 = C^2/\lambda$)

化为

$$\frac{dW}{W(a + bW - c^2W^2)} = d\tau \quad (33)$$

$$\frac{\delta dW}{W} + \frac{a dW}{W - W_1} + \frac{\beta dW}{W - W_2} = -c^2 d\tau \quad (34)$$

其中 $W_1 = (D - 3C\lambda)/2c^2\lambda + \sqrt{(3C\lambda - D)^2 + 4c^2\lambda^3}/2c^2\lambda$

$W_2 = (D - 3C\lambda)/2c^2\lambda - \sqrt{(3C\lambda - D)^2 + 4c^2\lambda^3}/2c^2\lambda$

$$\delta = -\frac{1}{W_1 W_2}, \quad \alpha = -\frac{2W_1 + W_2}{W_1 W_2 (W_2 - W_1)}, \quad \beta = -\frac{W_1 + 2W_2}{W_1 W_2 (W_1 - W_2)}$$

因此, 方程的解为

$$(W - W_1)^\alpha (W - W_2)^\beta W^\delta = e^{-c^2 \tau} \quad (35)$$

2) $A=0, D=0$ 时即 λ 为纯虚根的情况, 把(31)第二式微分一次, 且应用(24)式略去四次项可得

$$g'' = (-B + 6CW_0^2)g - 6Cg^2 - 6\frac{C^2}{B}g^3 + 6CBW_0^2 \quad (36)$$

对上式两边乘 $2g'$ 积分一次得

$$g'^2 = ag^2 + bg^3 + cg^4 + dg + e \quad (37)$$

式中 $a = \frac{-B + 6CW_0^2}{2}$, $b = -2C$, $c = -\frac{3C^2}{2B}$, $d = 6CBW_0^2$, e 为积分常数,

令

$$G(g) = g^4 + \frac{b}{c}g^3 + \frac{a}{c}g^2 + \frac{d}{c}g + \frac{e}{c} \quad (38)$$

$$dg/\sqrt{cG(g)} = d\tau \quad (39)$$

$\sqrt{G(g)}$ 在特殊情况下可化为

$$\begin{aligned} \sqrt{G(g)} &= \sqrt{(g^2 - g_1^2)(g^2 - g_2^2)} \\ &= \sqrt{g_1^2 g_2^2 \left[1 - \left(\frac{g}{g_1}\right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 \left(\frac{g}{g_1}\right)^2 \right]} \end{aligned} \quad (40)$$

g_1, g_2 为 $G(g)$ 的两个重特解。此时

$$\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}} = g_1 \sqrt{c} d\tau \quad (41)$$

其中 $\eta = g/g_1$

$$\eta = sn(g_1 \sqrt{c} \tau, g_1/g_2) \quad (42)$$

即

$$g = g_1 sn(g_1 \sqrt{c} \tau, g_1/g_2) \quad (42)'$$

是椭圆正弦函数。

$$w(x, z, t) = \sqrt{W_0^2 - \frac{g_1^2}{\beta^2} sn^2(g_1 \sqrt{c}(kx + nz - \sigma t), g_1/g_2)} \quad (43)$$

由以上分析看出,系统(8)的一次近似解是一组直线(鞍点或结点附近)和一组椭圆(中心附近)。二次近似解,即考虑了非线性的作用后,系统(8)的近似解变为双曲余切函数(鞍点或结点附近)和椭圆函数。考虑三次项后,系统(8)的近似解变得更加复杂,但在中心附近仍能在特殊情况下得到椭圆函数形式的解。对于系统(8)的解我们只能得到近似解,更进一步的解我们只知道其和一次近似系统的解的稳定性相同,特别是在一次近似为中心附近,非线性系统(8)仍为中心,即非线性重力惯性波存在周期解。

六、结 语

本文利用密度的不均匀性引入了非线性项的作用,使得讨论非线性方程时,避免了应用级数展开所带来的一些数学问题。利用本模式不仅可以得到文献[2]所得到的一切结果,而且可以证明一次近似系统存在周期解时,原系统也存在周期解。使得平衡点(0,0)附近解的特性更加明朗。文中还讨论了本模式的一系列近似解,一次近似为线性解,二次以上近似为非线性解。

在本文中没有考虑非绝热加热的作用。非绝热加热的作用是中尺度系统发展的重要机制之一。考虑非绝热加热(如积云对流加热)的作用,将可能有更好的结果。

参 考 文 献

- [1] 刘式达、刘式适,大气非线性波动方程的解,气象学报,40,3,279—288,1982。
- [2] 刘式适等,层结切变流体非线性重力内波的稳定性,气象学报,42,1,24—34,1984。
- [3] 刘式达、刘式适,一类层结切变流和一些有关非线性解,力学学报,16,2,10—18,1984。
- [4] 张可苏,大气动力学模式的比较研究,中国科学,第3期,1980。
- [5] 张锦炎,常微分方程几何理论与分支问题,北京大学出版社,46—56,1981。
- [6] 赵瑞星,一类特殊系统的非线性周期解,科大研究生院学报,6,1,53—60,1989。

THE NONLINEAR PERIODIC SOLUTION OF INERTIA-GRAVITATIONAL WAVE IN STRATIFIED ATMOSPHERE

Zhao Ruixing

(Meteorological Bureau, Headquarters of the General Staff)

Abstract

In the stratified atmosphere in which the moment nondivergent approximation was applied, the nonlinear term was introduced because of the nonhomogeneous spatial distribution of density. The solution to be of the form of progressive wave is considered and obtained a two-order nonlinear equation. By means of this system, all results which were derived by Liu Shikuo (1984) were obtained. Moreover, it can be proved that there existed periodic solution in the nonlinear system when there existed periodic solution in the one-order approximation system, and some mathematic problems that were caused by using series expansion were avoided. In this paper, a series of approximatic solution of nonlinear system is also discussed.