

用二相介质有限元方法对共和 7.0 级地震前兆的数值模拟*

梁子斌 钱家栋**

(国家地震局兰州地震研究所, 兰州 730000)

夏玉胜

(青海省地震局, 西宁 810001)

赵和云 蔡红卫 张慧

(国家地震局兰州地震研究所, 兰州 730000)

摘要 利用固-液二相介质平面应变问题的有限元程序对共和 7.0 级地震的前兆现象的时空分布进行了数值模拟. 研究中不仅考虑了固相的非线性、硬化及膨胀等效应, 也充分考虑了水对前兆的影响, 因此模拟结果与实际的前兆分布特征符合较好.

关键词: 地震前兆 数值模拟 有限元分析 共和地震

1 前言

共和地震是西北地区近 20 年来发生的最大的一次地震, 破坏性也最大, 因而在西北地区具有一定的代表性, 对该次地震进行深入研究是有一定意义的. 共和地震发生在青海共和盆地内, 其发震断层的走向为北 15° 西, 倾向北东, 倾角为 $75^{\circ} \sim 80^{\circ}$, 断层两侧显示出强烈的挤压现象. 震源机制解也表明该次地震以倾滑为主. 据对航磁资料的分析, 在震中附近 14 ~ 30 km 深度上存在一盆形强磁性高密度体, 界面形状为南陡北缓, 这一块体对共和地震的孕育过程起着重要作用.

对地壳这样复杂的多相介质, 不仅要考虑它的非线性力学性质(弹、塑性及膨胀等), 还要考虑它内部多相物质共存及相互作用的影响. Rudniki and Rice 利用简单的微观模型给出了多相介质的本构关系^[1], 这一模型不仅考虑了介质的非线性性质, 也同时考虑了流体的运移情况, 因而更符合大地介质的真实情况. 牛志仁等据此利用平面应力问题采用有限差分方法对唐山 7.8 级地震过程进行了数值模拟, 模拟结果与实际地震前兆有较好的对应^①. 虽然共和地震与唐山地震的地震序列均为主余震型, 但震源机制不同, 共和地震以倾滑逆冲为主. 基于此, 本文采用平面应变问题对共和地震的孕震过程进行数值模拟, 探讨共和地震的前兆在时空上的分布规律.

* 地震科学联合基金资助课题(编号: 95170).

** 现在国家地震局分析预报中心工作.

第一作者简介: 梁子斌, 男, 1963 年 8 月生, 助理研究员, 现从事地震预报电方法理论研究工作.

① 牛志仁, 等. 华北北部地震孕育及前兆机理的数值模拟研究. 1995.

2 地质模型、介质参数及边界条件的选取

地下流体基本包括水、油和气三种物质，它们存在于岩石的孔隙中，本文只考虑水的作用，就是介质孔隙中只有水的二相介质情形。由多相介质的本构关系、介质连续性条件及达西定律可直接得到介质刚度方程。本文拟采用有限元方法进行求解，通过求解线性方程组，从而得到问题的解。具体实现参见附录。

依据共和地震的震源机制解，主断层是走向为 NW、倾向为 SW 的逆冲断层，其主压应力方向为 NE，而且附近的几条较大断层或破裂带也呈 NW 向展布，与发震断层近于平行，参见图 1。因此本文选取沿 NE 向通过震源的一条总长为 300km 的剖面作为研究区域，如图 1 中的虚线 AB 所示，其深度取莫霍面以上，从 SW 到 NE 剖面深度由深变浅。如果不考虑与剖面垂直方向(NW 向)上的变化，则可视为一个平面应变问题。将研究区域分为 5 种不同介质类型，分别为：I 上地壳、II 中地壳、III 下地壳、IV 硬包体及 V 断层或破碎带，其纵剖面如图 2 所示。在模型的两端施加挤压力，由于缺少水平形变的实际资料，其两端位移速率为 10cm/a。剖面上界面取为自由面，因为未考虑重力的作用，因而其下界面也取为自由面。需指出的是，剪切模量 G 与体积模量 K 是依据周民都等给出的各层地震波速得到的^[2]。硬化模量、膨胀因子和摩擦系数的选取是根据文献[1]中所讨论的取值范围确定的，各层介质的参数见表 1。为程序编制方便，所有单元均采用三角形单元。

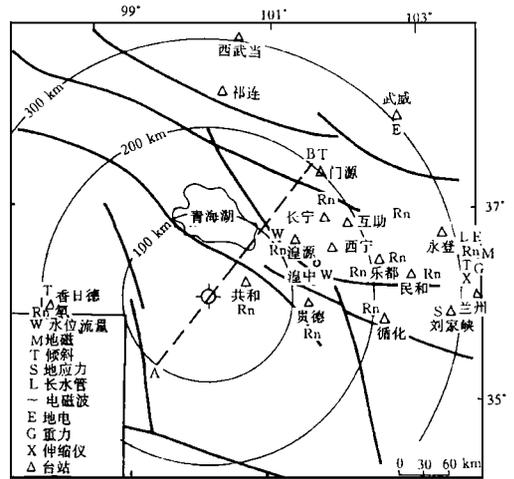


图 1 研究区地质构造和前兆异常台站分布图

Fig. 1 Distribution of geological structures and observation stations.

3 模拟结果及讨论

由于前面所给出的多相介质的本构关系不仅考虑了固相的弹塑性和膨胀效应，也充分考虑了液相(水)对介质力学性质的影响，以及其自身的流动，因此可以模拟很多与地震过程相关的前兆现象，进而从物理意义上对前兆现象进行理论解释。

介质的力学状态可分为 7 种，即线性、非线性、硬化、膨胀、弱化、恢复和破坏，据此可简单地描述介质的力学状态和演变过程。在本文的模拟过程中每一步计算的时间间隔取为一年，用 T_i 表示，其中下标 $i = 1 \sim 30$ 。从模拟结果来看，从开始加压起大约经过 30 年，出现了共和地震的主破裂。在这段时间内，其演化过程与实际真实介质的演化过程比较一致。图 3 只给出了

T_8, T_{20}, T_{27} 和 T_{30} 时介质各个单元的力学状态图。下面我们对共和地震的一些前兆现象分别进行讨论。

3.1 地震活动性

在开始加压后的一段时间内($T_1 \sim T_5$)，介质各单元

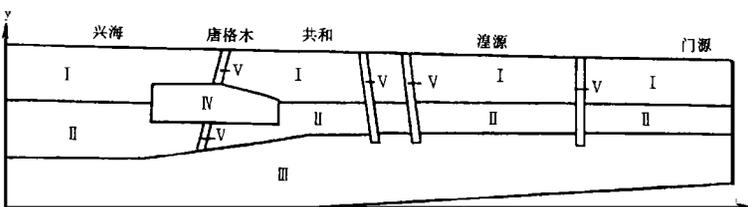
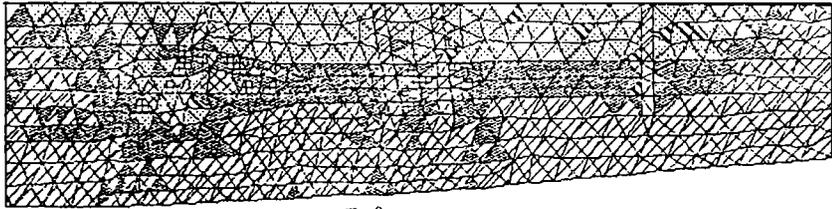


图 2 研究区介质模型示意图

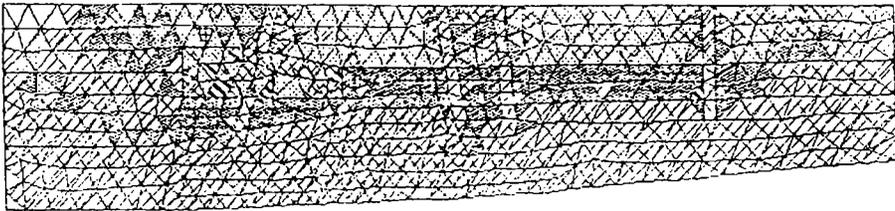
Fig. 2 Sketch of medium in research region.

表 1 计算模型介质参数表

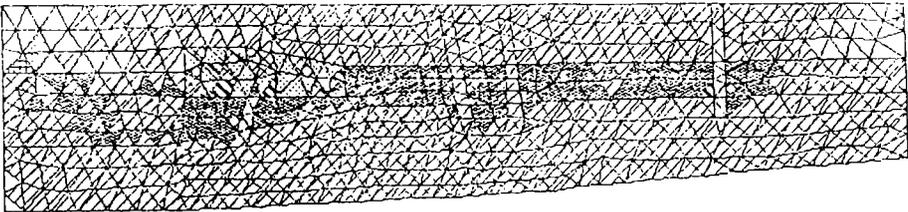
介质类型	剪切模量(G) cm ² /kg	体积模量(K) cm ² /kg	水的弹性模量(K_s) cm ² /kg	水的粘滞系数(η)	硬化模量(h) cm ² /kg	膨胀因子(β)	摩擦系数(μ)
I	0.30	0.90	0.02	0.20	0.30	0.40	0.60
II	0.55	1.00	0.02	0.20	0.40	0.40	0.60
III	0.73	1.14	0.02	0.20	0.50	0.40	0.60
IV	0.69	1.15	0.02	0.20	0.40	0.40	0.60
V	0.27	0.60	0.02	0.20	0.40	0.40	0.60



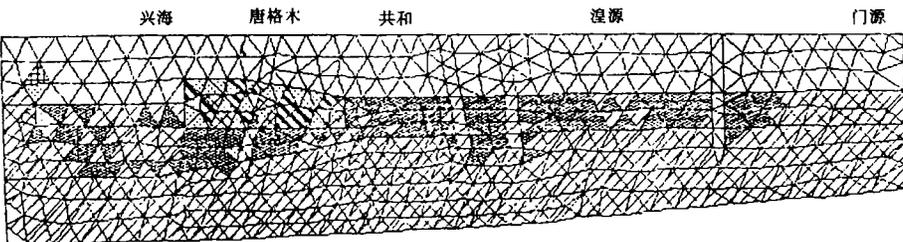
$T = 8$



$T = 20$



$T = 27$



$T = 30$



图 3 各时刻单元力学状态图

Fig. 3 The mechanics state in every unit at different times.

处于弹性状态,在 T_5 之后,介质内深处(下地壳)开始出现非线性状态,随后逐渐发展到地表层.总的看来,下地壳一直处于非线性状态,中地壳处于硬化状态,上地壳处于弱化状态.在震源区附近,介质状态比较混乱,一些单元发生硬化、膨胀及弱化现象,但没有明显的破裂发生.而在远离震源区的东北方向上,地质结构较复杂,下地壳和中地壳比较稳定,一直处于非线性和硬化状态,上地壳大部分单元出现了弱化,并在一定单元内出现了一些小破裂,这与实际情况相符合,如图3中 T_8 图所示.在 T_{20} 之后,外围地区逐渐平静下来,上地壳由弱化转为非线性状态或线性状态,而在震源区内出现一些小破裂,到 T_{30} ,发生了共和主震.

3.2 水氡前兆异常

在模拟过程中,对水氡前兆现象,没有直接的变化量来描述,但我们可以间接利用介质内的体应变来进行定量解释.介质处于膨胀阶段时,由于介质的膨胀,孔隙度增加,水氡含量必然增加,而在介质状态恢复过程中,水氡含量将减小.模拟结果表明,在共和的外围地区孔隙度具有下降→上升→下降的变化,这与实际水氡测值具有平稳→上升→下降的变化过程相一致,如湟源、西宁、乐都及民和等测点^②.图4给出了临震前 T_{30} 的孔隙压和孔隙度在剖面上的分布.

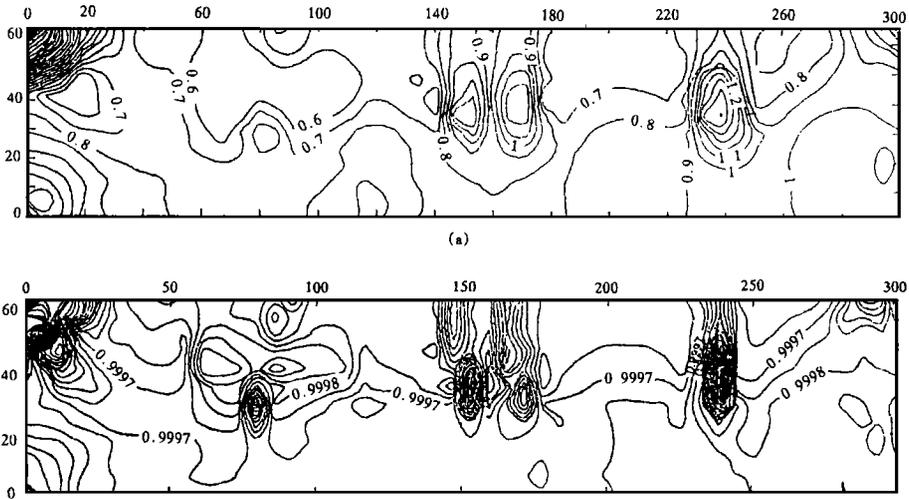


图4 震前 T_{30} 孔隙压和孔隙度等值线分布图

Fig. 4 Isogram of pore pressure and porosity before earthquake (T_{30}).

(a) 孔隙压分布(单位: kg/cm^2); (b) 孔隙度分布

3.3 泉水流量

在共和及周围地区,泉水流量观测点只有湟源台一个,由湟源台泉水流量测量发现,从1989年9月开始,泉水流量大幅度上升.从本文模拟的结果也可以看出,在湟源台附近 T_8 以后,介质内孔隙压逐渐增加,与实际情况一致.

3.4 地表形变(水准测量)

由1983年开始,在震中周围形成一个隆起区,而且呈持续上升趋势^[3].这可能是震源区下面的高密度体受压产生膨胀所致,参见图5.

4 结语

② 青海省地震局. 共和6.9级地震. 1991.

从本文模拟结果可以看出, 利用二相介质模型的本构关系来模拟地下介质的物理过程是比较适宜的, 它不仅考虑了介质的应力、应变及膨胀效应等力学特征, 也充分考虑了液体水的作用. 模拟结果表明, 在纵向上, 下地壳介质状态演化超前于上地壳, 而且变化较缓慢, 由此也可以看出, 利用平面应变问题的物理模型进行模拟能更清楚地看到不同深度介质的力学状态和应变量大小, 从体应变角度不能完全说明地表垂直位移的状况^③. 在水平方

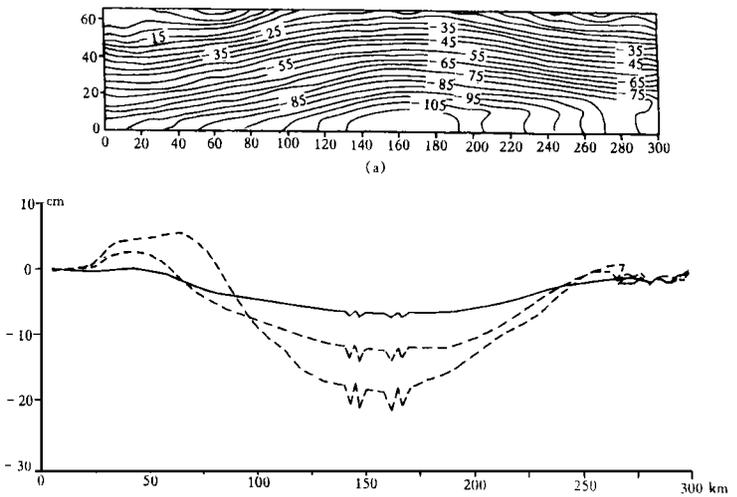


图 5 垂直位移的模拟结果
Fig. 5 Simulation result of vertical displacement (Unit: cm).

a 震前剖面内的垂直位移等值线分布; b 不同时刻地表垂直位移

向, 并未发现断层对前兆异常有多大的“阻隔”作用^④, 或许这是逆冲型地震特有的现象, 值得一提的是, 在断层附近, 各类前兆似乎更丰富, 许多短临前兆的突跳性异常常常发生在这些部位.

参考文献

- 1 Rudnicki J W and Rice J R. Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. *J Mech Phys Solids*, 1975, 23: 371 ~ 394.
- 2 周民都, 等. 青藏高原东北缘及其邻区的地壳结构与地震关系初探. *西北地震学报*, 1997, 19(1): 58 ~ 63.
- 3 巩守文, 等. 共和 6.9 级地震垂直形变场位错模式及其演化特征的研究. *地震学报*, 1993, 15(3): 289 ~ 295.
- 4 杜学彬, 等. 地电阻率临震突变与活断层、发震应力场. *地震学报*, 1994, 15(3): 303 ~ 312.

NUMERICAL SIMULATION OF GONGHE EARTHQUAKE ($M=7.0$) PROCESS BY THE FINITE ELEMENT METHOD IN TWO PHASE MEDIUM

LIANG Zibin QIAN Jiadong

(*Earthquake Institute of Lanzhou, SSB, Lanzhou 730000*)

XIA Yusheng

(*Seismological Bureau of Qinghai Province, Xining 810001*)

ZHAO Heyun CAI Hongwei ZHANG Hui

(*Earthquake Institute of Lanzhou, SSB, Lanzhou 730000*)

Abstract

The Gonghe earthquake ($M=7.0$) and its precursors are simulated by the finite element method in two dimensional plane strain model. In this model, not only the effect of nonlinear, hardening, dilation of solid phase, but also the influence of water be considered, so distribution of precursors by the simulation is similar to that of fact.

Key words: Earthquake precursor, Numerical simulation, Finite element analysis, Gonghe earthquake

③ 钱家栋, 等, 重点监视区多种前兆时空分布物理模式的研究. 1994.

附录

1 基本方程

1.1 具有非线性变化的孔隙介质本构关系

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{1}{2G} (\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_0) + \frac{1}{3K} \delta_{\alpha\beta} (\sigma_0 - \zeta P) + \frac{1}{h} \left[\frac{\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_0}{2\tau} + \frac{\beta}{3} \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{\sigma_{\gamma\delta} - \delta_{\gamma\delta} \sigma_0}{2\tau} + \frac{\mu}{3} \delta_{\gamma\delta} (\sigma_{\gamma\delta} - P \delta_{\gamma\delta}) \right] \right] \quad (1)$$

这里下角标满足爱因斯坦求和约定。其中 $\tau = \sqrt{(\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_0)(\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_0)}/2$

(1) 式中, u_α 为固相介质的位移向量, G, K, h, β 和 μ 分别为固体介质的剪切模量、体积模量、硬化模量、膨胀因子和摩擦系数, ζ 为介质常数。

1.2 固体介质连续性条件

$$\frac{1}{1-f} f - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2)$$

式中 f 为固体框架的孔隙度。

1.3 运动平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (3)$$

1.4 流体运动方程

由液体连续性条件及达西定律可得

$$\frac{1}{f(1-f)} f + \frac{1}{K_f} P - \frac{\eta}{f} \frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha^2} = 0 \quad (4)$$

其中 η 为水的粘滞系数, K_f 为水的压缩模量。

2 方程组求解

对于(4)式, 可先假定水容易流动($\eta=0$), 且最后一项为二阶导数, 如忽略此项, 则(4)式可写成:

$$\frac{1}{f(1-f)} f + \frac{1}{K_f} P = 0 \quad (5)$$

联合考虑(2)式, 消去 f 得到:

$$P = - \frac{K_f}{f} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (6)$$

将(6)式代入(1)式, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) &= \left\{ \frac{1}{2G} (\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_0) + \frac{1}{3K} \delta_{\alpha\beta} \sigma_0 + \frac{1}{h} \left[\frac{\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_0}{2\tau} + \frac{\beta}{3} \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{\sigma_{\gamma\delta} - \delta_{\gamma\delta} \sigma_0}{2\tau} + \frac{\mu}{3} \delta_{\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\{ \frac{1}{3K} \delta_{\alpha\beta} \zeta + \frac{1}{h} \left[\frac{\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_0}{2\tau} + \frac{\beta}{3} \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{\sigma_{\gamma\delta} - \delta_{\gamma\delta} \sigma_0}{2\tau} + \frac{\mu}{3} \delta_{\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta} \right] \right] \frac{K_f}{f} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right\} \right. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{令 } A'_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_0}{2\tau} + \frac{\beta}{3} \delta_{\alpha\beta}, \quad B_{\gamma\delta} = \frac{\sigma_{\gamma\delta} - \delta_{\gamma\delta} \sigma_0}{2\tau} + \frac{\mu}{3} \delta_{\gamma\delta}$$

$$C'_{\alpha\beta} = \frac{1}{3K} \delta_{\alpha\beta} \zeta + \frac{1}{h} A'_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta} \delta_{\gamma\delta} = \frac{\zeta}{3K} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\mu}{h} A'_{\alpha\beta} \quad (B_{\gamma\delta} \delta_{\gamma\delta} = \mu)$$

考虑(6)式, 则(7)式化为:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{K_f C'_{\alpha\beta}}{f} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2G} (\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_0) + \frac{1}{3K} \delta_{\alpha\beta} \sigma_0 + \frac{1}{h} A'_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta} \delta_{\gamma\delta} \quad (8)$$

3 对平面应变问题

$\epsilon_{zz} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, 并令: $C_{\alpha\beta} = \frac{K_f}{f} C'_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} A'_{\alpha\beta}$, 可得到:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - C_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2G} \sigma_{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \delta_{\alpha\beta} \sigma_0 + A_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta} \quad (9)$$

令 (α, β) 分别为 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, 并代入(9)式, 可分别得到:

$$\begin{aligned} (1 - C_{11}) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - C_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \left[\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} + A_{11} B_{11} \right] \sigma_{11} + 2A_{11} B_{12} \sigma_{12} + \\ &\quad + \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{11} B_{22} \right] \sigma_{22} + \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{11} B_{33} \right] \sigma_{33} \end{aligned} \quad (9-1)$$

$$- C_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - C_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = A_{12} B_{11} \sigma_{11} + \left[\frac{1}{2G} + 2A_{12} B_{12} \right] \sigma_{12} + A_{12} B_{22} \sigma_{22} + A_{12} B_{33} \sigma_{33} \quad (9-2)$$

$$-C_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (1 - C_{22}) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{22}B_{11} \right] \sigma_{11} + 2A_{22}B_{12} \sigma_{12} + \left[\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} + A_{22}B_{22} \right] \sigma_{22} + \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{22}B_{33} \right] \sigma_{33} \quad (9-3)$$

$$-C_{33} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - C_{33} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{33}B_{11} \right] \sigma_{11} + 2A_{33}B_{12} \sigma_{12} + \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{33}B_{22} \right] \sigma_{22} + \left[\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} + A_{33}B_{33} \right] \sigma_{33} \quad (9-4)$$

由(9-4)得: $\sigma_{33} = -D \left\{ C_{33} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{33} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{33}B_{11} \right] \sigma_{11} + 2A_{33}B_{12} \sigma_{12} + \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{33}B_{22} \right] \sigma_{22} \right\}$ (10)

其中 $D = \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} + A_{33}B_{33} \right)^{-1}$

将(10)式分别代入(9-1), (9-2), (9-3)式, 则可写成下面的矩阵形式:

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}\boldsymbol{\sigma} \quad (11)$$

其中

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right]^T$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22} \right]^T$$

$$S_{11} = D \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{11}B_{33} \right] C_{33} - C_{11} + 1$$

$$S_{12} = 0$$

$$S_{13} = D \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{11}B_{33} \right] C_{33} - C_{11}$$

$$S_{21} = DA_{12}B_{33}C_{33} - C_{12}$$

$$S_{22} = 1$$

$$S_{23} = DA_{12}B_{33}C_{33} - C_{12}$$

$$S_{31} = D \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{22}B_{33} \right] C_{33} - C_{22}$$

$$S_{32} = 0$$

$$S_{33} = D \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{22}B_{33} \right] C_{33} - C_{22} + 1$$

$$T_{11} = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} + A_{11}B_{11} - D \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{11}B_{33} \right] \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{33}B_{11} \right]$$

$$T_{12} = 2A_{11}B_{12} - 2DA_{33}B_{12} \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{11}B_{33} \right]$$

$$T_{13} = \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{11}B_{22} - D \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{11}B_{33} \right] \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{33}B_{22} \right]$$

$$T_{21} = A_{12}B_{11} - DA_{12}B_{33} \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{33}B_{11} \right]$$

$$T_{22} = \frac{1}{2G} + 2A_{12}B_{12} - 2DA_{33}B_{12}A_{12}B_{33}$$

$$T_{23} = A_{12}B_{22} - DA_{12}B_{33} \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{33}B_{22} \right]$$

$$T_{31} = \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{22}B_{11} - D \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{22}B_{33} \right] \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{33}B_{11} \right]$$

$$T_{32} = 2A_{22}B_{12} - 2DA_{33}B_{12} \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{22}B_{33} \right]$$

$$T_{33} = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} + A_{22}B_{22} - D \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{22}B_{33} \right] \left[\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} + A_{33}B_{22} \right]$$

4 总刚度方程及其求解

将(11)式写成 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}$.

依虚位移原理, 易得单元刚度矩阵:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} \Delta_s$$

其中 $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{S} \mathbf{B}$ 为单元应变矩阵, Δ_s 为单元面积.

总刚度方程可写为: $\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{R}$, 若取时间间隔为 Δt , 则: $\mathbf{K}\Delta\boldsymbol{\delta} = \Delta\mathbf{R}$

其中, $\Delta\boldsymbol{\delta}$ 为结点位移变化向量, $\Delta\mathbf{R}$ 为边条件变化向量, 解上面的线性刚度方程组, 可依次求得 $\Delta\boldsymbol{\delta}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ 及 Δf . 由 Δf 利用(4)式可求得 ΔP , 问题得解.