

非匀质场地地震反应的模态叠加法解

任 慧, 尚守平, 李 刚

(湖南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘 要:将模态叠加法应用于刚性基岩上、受坚直上传播的稳态剪切地震波激振下剪切刚度沿深度按指数规律增长的单层非匀质场地土模型的地震反应分析,求得有效振型参与系数的解。在算例分析中将此类非匀质场地与剪切波速取为平均值的匀质场地的有效振型参与系数进行了比较,并验证了第一阶固有频率的工程估算式仍可用于此类非匀质场地,且其对估算高阶固有频率是个很重要的参数。

关键词:地震反应;模态叠加法;非匀质场地;有效振型参与系数;固有频率

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0844(2009)01-0026-06

Seismic Response of Inhomogeneous Site by Using the Mode-superposition Method

REN Hui, SHANG Shou-ping, LI Gang

(Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: The mode-superposition method is applied to the analysis of seismic response of an inhomogeneous site which is excited by vertically propagating shear waves. The solutions for effective modal participation factor are presented for a single layer with a shear stiffness distribution exponentially increasing with depth. In an example the solutions are compared with those of a homogeneous site with an average shear wave velocity. The example also verifies that the natural frequency for the first mode can still be estimated from the formula in engineering and is an important parameter for estimating the high mode frequencies.

Key words: Seismic response; Mode-superposition method; Inhomogeneous sites; Effective modal participation factor; Natural frequency

0 引言

在地基—基础—上部结构动力相互作用分析中,对自由场地进行动力反应分析是首要任务。由于天然场地土壤特性一般随深度条件不同而分层变化,发展复杂条件下土层振动特性与地震响应分析方法是十分必要和具有实际意义的。这方面的研究成果也不少。Idriss 和 Seed 等用一维剪切梁模型求解剪切模量为常数及剪切模量沿深度按幂函数变化的场地土层水平地震反应^[1]。Davis、Zhao 等又进行了剪切模量沿深度按幂函数分布的自由场地的横向振动研究^[2-4]。国内栾茂田等基于一维剪切

梁模型,给出了水平成层匀质及考虑了各层土的剪切模量沿深度按幂函数规律变化的非均质场地的自振特性和地震反应的解析表达式^[5-6]。楼梦麟则利用均匀层状地基剪切振动模态函数,结合模态摄动原理,建立了一个求解变系数波动方程的近似方法,适用于任何变系数土层的动力特性求解和地震反应分析^[7]。文献^[8]采用一维波动模型,研究了半空间上受坚直上传播的稳态剪切波激振下剪切模量沿深度按指数规律变化的单层场地土的横向自由振动问题,着重分析了此类场地土的放大效应。文献^[9]

收稿日期:2008-04-08

基金项目:湖南省科技计划重点项目(06sk4057)

作者简介:任 慧(1979-),女(汉族),湖南长沙人,博士生,从事土与结构动力相互作用研究。

利用剪切梁模型理论研究了指数函数剪切模量成层地基上变截面坝的随机地震反应问题。

模态叠加法为动力反应分析中动力方程的求解方法之一,它理论简明,可显著降低要求解的方程数目,是迄今仍广泛采用的经典方法。本文根据某小区一段粉质粘土的剪切波速随深度变化的实测数据(图1)结合小 Ballard 和 Casagrande(1967)提供的均匀细砂中剪切波速与深度的关系^[10],在文献[8]的基础上提出了剪切刚度沿深度按指数规律增长的单层场地土模型,进行了振动特性研究,并采用模态叠加法分析其地震反应。

1 分析模型

根据图1结合前人工作建立了剪切刚度沿深度按指数规律增长的基岩上覆单层场地土模型如图2所示。场地土层的密度为 ρ_0 ,剪切刚度沿深度 z 按指数规律变化:

$$G(z) = G_0 \exp(\alpha \cdot z/h)$$

式中: G_0 为深度 $z=0$ 时的剪切刚度; α 为大于零的无量纲常数,取决于上覆场地土的特性,可由试验确定;基岩的密度为 ρ_R ;剪切刚度为常数 G_R 。

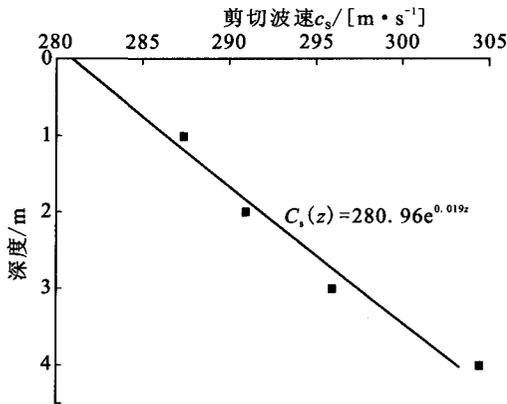


图1 某小区一段粉质粘土的剪切波速随深度变化图

Fig.1 Shear wave velocities increasing with depth in a silty clay site.

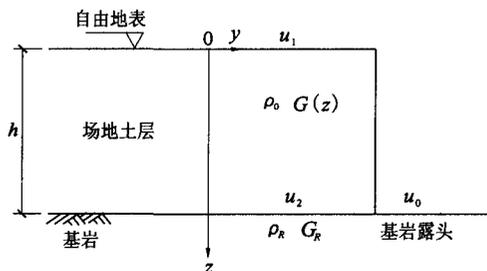


图2 基岩上覆单层场地土体系

Fig.2 The model with a single layer on bedrock.

假定:①上覆场地土受坚直向上传播的稳态剪切地震波激振作自由振动,并只在对称平面 yOz 内作横向振动;②基岩为刚性,水平地震加速度为 $\ddot{v}_g(t)$,场地土层底部嵌固在基岩上,土层与基岩之间没有能量交换。边界条件考虑为:地表面为自由边界,基岩面为静止边界。以 $v=v(z,t)$ 表示上覆场地土层的横向位移,运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(G(z) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \rho(z) \omega^2 v = 0 \quad (1)$$

场地土层顶部与底部的边界条件和初始条件分别为

$$\begin{cases} \tau_{yz} |_{z=0} = 0 & (a) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} |_{z=h} = \ddot{v}_g(t) & (b) \\ v |_{z=h} = 0 & (c) \\ v |_{t=0} = 0 & (d) \\ \frac{\partial v}{\partial t} |_{t=0} = 0 & (e) \end{cases} \quad (2)$$

2 场地土模型的固有振动

在进行场地动力方程的模态叠加法求解之前,需确定场地土的固有振型和固有频率。

场地动力反应分析中的位移是空间与时间的变量,场地土体系的振型与时间无关,所以设运动方程(1)的解为

$$v(z,t) = \varphi(z)T(t) \quad (3)$$

采用分离变量法求解,于是由运动方程(1)可得到两个二阶齐次常微分方程:

$$\begin{cases} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \\ G_0 e^{\frac{\alpha}{h}z} \varphi''(z) + G_0 \frac{\alpha}{h} e^{\frac{\alpha}{h}z} \varphi'(z) + \omega^2 \rho_0 \varphi(z) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

方程(4)的解为

$$\begin{cases} T(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \\ \varphi(\chi) = \sqrt{\chi} \left(A J_1 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi} \right) + B Y_1 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi} \right) \right) \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\chi = (\omega/c_{s0})^2 e^{-\alpha z/h}$; c_{s0} 为场地土层深度 $z=0$ 时的剪切波速; A, B, C 和 D 为待定常数; $J_1(\cdot)$ 和 $Y_1(\cdot)$ 分别为一阶第一类和第二类贝塞尔函数。

利用振型系统的完备性,则 $v(z,t)$ 可以表示成

$$v(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(z) T_i(t) \quad (6)$$

根据式(5)得到场地土体系的振型函数为

$$\varphi_i(\chi_i) = \sqrt{\chi_i} \left(A J_1 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi_i} \right) + B Y_1 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi_i} \right) \right) \quad (7)$$

式中 $\chi_i = (\omega_i/c_{s0})^2 e^{-\alpha \cdot z/h}$ 。

结合式(2(a))的边界条件,可求得相应于每一固有频率 ω_i 的场地土层自由振动形式如下:

$$\varphi_i(\chi_i) = \sqrt{\chi_i} \left(J_1 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi_i} \right) Y_0 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi_{1,i}} \right) - Y_1 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi_i} \right) J_0 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi_{1,i}} \right) \right) \quad (8)$$

式中: $z=0$ 时, $\chi_{1,i} = (\omega_i/c_{s0})^2$; $\varphi_i(\chi_i)$ 称为第 i 阶振型函数; $J_0(\cdot)$ 和 $Y_0(\cdot)$ 分别为零阶第一类和第二类贝塞尔函数。

结合式(2(c))的边界条件有

$$\sqrt{\chi_{2,i}} \left(J_1 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi_{2,i}} \right) Y_0 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi_{1,i}} \right) - Y_1 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi_{2,i}} \right) J_0 \left(\frac{2}{m} \sqrt{\chi_{1,i}} \right) \right) = 0 \quad (9)$$

式中 $z=h$ 时, $\chi_{2,i} = (\omega_i/c_{s0})^2 e^{-\alpha}$ 。由上式可以求出各振型固有频率 ω_i 。

由不同阶固有频率 ω_i, ω_j 的振型函数 $\varphi_i(z), \varphi_j(z) (i \neq j)$, 可求得

$$\int_0^h \rho_0 \varphi_i \varphi_j dz = 0, \int_0^h \varphi'_i G \varphi'_j dz = 0 \quad (10)$$

说明在简单支承条件下,振型 φ_i 与 φ_j 关于质量 ρ_0 和剪切刚度 G 具有正交性。

当两振型为同阶时,即 $i=j$, 则可求得

$$\int_0^h \rho_0 \varphi_i^2 dz = M_i, \int_0^h G(\varphi'_i)^2 dz = K_i \quad (11)$$

式中 M_i, K_i 分别为第 i 阶振型的广义质量和广义刚度。

3 场地土模型地震反应的模态叠加法解

场地土层下的基岩水平地震加速度为 $\ddot{v}_g(t)$, 初始位移和速度为零, 根据虚功原理可得

$$\sum_i (M_i \omega_i^2 T_i(t) + M_i \ddot{T}_i(t) + \zeta_i \ddot{v}_g(t)) \delta T_i(t) = 0 \quad (12)$$

式中 ζ_i 是地震干扰因子, 表示地震运动使反应达到的程度^[10], $\zeta_i = \int_0^h \rho_0 \cdot \varphi_i(z) dz$ 。

式中的变分 $\delta T_i(t)$ 为任意, 则式(12)成立的充要条件是

$$\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = -\frac{\zeta_i}{M_i} \ddot{v}_g(t) \quad (13)$$

根据微分方程理论, 并结合如式(2(d))和式(2(e))所示的初始条件得到上式的解为

$$T_i(t) = -\frac{\zeta_i}{M_i \omega_i} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

设基岩运动的水平加速度为周期等于 T_0 的单个正弦函数^[12], 即

$$\ddot{v}_g(t) = \begin{cases} \frac{A\omega_0^2}{2\pi} \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases} \quad (15)$$

式中: $\omega_0 = 2\pi/T_0$; A 为具有长度量纲的常数。将式(7)、(14)和(15)代入式(6), 求得场地土体系的相对位移为

$$v(z,t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} -\Phi_i \frac{A\omega_0^2}{2\pi\omega_i} \left(\frac{\omega_0 \sin \omega_i t - \omega_i \sin \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega_i^2} \right), & 0 \leq t \leq T_0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} -\Phi_i \frac{A\omega_0^3}{2\pi\omega_i} \left(\frac{\sin \omega_i t - \sin \omega_i(t-T_0)}{\omega_0^2 - \omega_i^2} \right), & t > T_0 \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{式中 } \Phi_i = \frac{\zeta_i}{M_i} \varphi_i(\chi_i) = \frac{\int_0^h \varphi_i(\chi_i) dz}{\int_0^h \varphi_i^2(\chi_i) dz} \quad (17)$$

上式定义为有效振型参与系数 Φ_i ^[4], Φ_i 与广义质量 M_i 成反比, 与地震干扰因子 ζ_i 成正比, 与振型函数 $\varphi_i(\chi_i)$ 相关。

场地土体系任一时刻的相对速度为

$$\dot{v}(z,t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} -\Phi_i \frac{A\omega_0^3}{2\pi} \left(\frac{\cos \omega_i t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega_i^2} \right), & 0 \leq t \leq T_0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} -\Phi_i \frac{A\omega_0^3}{2\pi} \left(\frac{\cos \omega_i t - \cos \omega_i(t-T_0)}{\omega_0^2 - \omega_i^2} \right), & t > T_0 \end{cases} \quad (18)$$

相对加速度为

$$\ddot{v}(z,t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} -\Phi_i \frac{A\omega_0^3}{2\pi} \left(\frac{-\omega_i \sin \omega_i t + \omega_0 \sin \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega_i^2} \right), & 0 \leq t \leq T_0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} -\Phi_i \frac{A\omega_0^3 \omega_i}{2\pi} \left(\frac{-\sin \omega_i t + \sin \omega_i(t-T_0)}{\omega_0^2 - \omega_i^2} \right), & t > T_0 \end{cases} \quad (19)$$

场地土体系的相对位移中只有有效振型参与系数 Φ_i 为空间的变量, 则只需对 Φ_i 求导, 就得出场地土体系任一时刻的剪应变和剪应力。

4 算例分析

某半空间上覆单层场地土体系, 材料参数如下: 场地土的密度 $\rho_0 = 1600 \text{ kg/m}^3$; $z=0$ 时的剪切波

速 $c_{s0} = 184 \text{ m/s}$; 土层厚 20.0 m ; 半空间的密度 $\rho_R = 2000 \text{ kg/m}^3$, 剪切波速 $c_{sR} = 600 \text{ m/s}$ 。

场地土的固有频率可由式(9)直接求解。由于求解的繁杂性,可采用工程实际中的近似估算法进行计算。即第一阶固有频率为地震波穿过该场地土层所需时间 4 倍的倒数,有

$$T_0 = 4 \int_0^h 1/c_s(z) dz \quad \omega_1 = 2\pi/T_0 \quad (20)$$

由此推出第二阶及高阶固有频率为

$$\omega_j = (2j - 1)\omega_1 \quad (j = 2, 3, \dots) \quad (21)$$

根据式(9)直接求解的前四阶固有频率和其估算值的比较见表 1。由表可知:第一阶固有频率误差较大,第二阶及以上的高阶固有频率误差较小,且随着 α 的减小各阶固有频率的误差也越小。因此为了避免求解的复杂性,当 α 在比较小的范围内 ($0 < \alpha \leq 0.5$) 时,剪切刚度沿深度按指数规律增长的场地土层固有频率可由式(20)和式(21)估算得到。

表 1 前四阶固有频率的直接求解值和估算值的比较

固有频率	估算值		直接求解值		误差/%	
	$\alpha=1$	$\alpha=0.5$	$\alpha=1$	$\alpha=0.5$	$\alpha=1$	$\alpha=0.5$
第一阶固有频率/Hz	18.36	16.33	20.47	17.22	-11.47	-5.43
第二阶固有频率/Hz	55.09	49.00	55.88	49.26	-1.430	-0.53
第三阶固有频率/Hz	91.82	81.67	92.22	81.8	-0.44	-0.17
第四阶固有频率/Hz	128.55	114.33	128.83	114.44	-0.22	-0.10

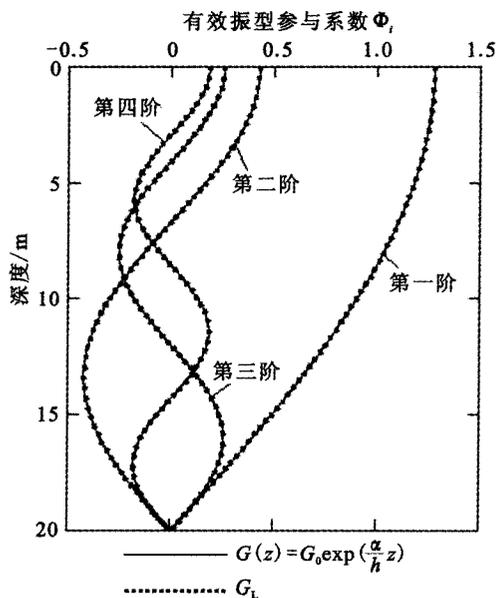


图 3 $\alpha=0.01$ 时第一到第四阶固有频率下的 Φ_i
Fig. 3 Effective modal participation factor Φ_i from first to fourth order in natural frequencies for a single layer with $\alpha=0.01$.

当场地土体系的剪切波速取为平均波速 c_{sL} 时,对应的剪切模量为 G_L ,且 $G_L = c_{sL}^2 \rho_0$ 。此时将场地土视为剪切模量为 G_L 的均质体系计算位移,由此可知,在给定基岩运动的水平加速度情况下,剪切刚度沿深度按指数规律增长与剪切刚度为常数的场地土体系的相对位移、速度和加速度等只在有效振型参与系数 Φ_i 上不同。现对前四阶固有频率下的上两种情况下的弹性场地土体系有效振型参与系数 Φ_i 进行比较。图 3 给出了 $\alpha=0.01$ 时的非匀质场地与取 G_L 时的匀质场地沿深度变化的有效振型参与系数,图中曲线基本重合,验证了结果的可靠性。图 4~图 5 给出了 $\alpha=0.5$ 和 1 时前四阶固有频率下的有效振型参与系数 Φ_i 与深度 z 的关系曲线。由图可知, α 越大,剪切刚度取 $G(z) = G_0 \exp(\alpha z/h)$ 和 G_L 时的有效振型参与系数 Φ_i 沿深度变化的曲线差距越大。当 $0 < \alpha \leq 0.5$ 时,两者差距很小。则剪切刚度沿深度按指数规律增长的场地土体系,当 α 在相当小的一段范围内 ($0 < \alpha \leq 0.5$),可按剪切波速取为平均值的匀质场地土体系来计算动力反应。

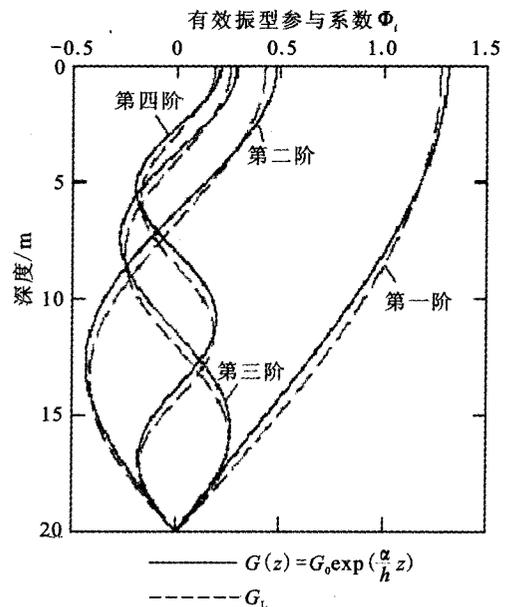


图 4 $\alpha=0.5$ 时第一到第四阶固有频率下的 Φ_i
Fig. 4 The Φ_i from first to fourth order with $\alpha=0.5$.

5 结论

本文采用模态叠加法对刚性基岩上剪切刚度沿深度按指数规律增长的单层非匀质场地土模型的地震反应进行了研究,得出以下结论:

- (1) 当剪切刚度中的无量纲常数 α 在比较小的范围内 ($0 < \alpha \leq 0.5$) 时,第一阶固有频率可由工程实际估算式求得,即地震波穿过该场地土层所需时间

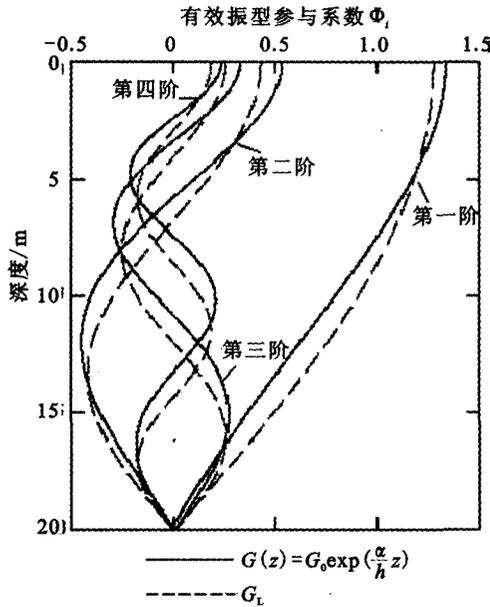


图5 $\alpha=1$ 时第一到第四阶固有频率下的 Φ_i
Fig. 5 The Φ_i from first to fourth order with $\alpha=1$.

4 倍的倒数;

(2) 估算的第一阶固有频率是个很重要的参数,由此建立简单公式推导的高阶固有频率,其工程精度较好;

(3) 在给定基岩运动的水平加速度情况下,剪切刚度沿深度按指数规律增长与剪切刚度为常数的场地土体系的相对位移、速度和加速度等只在等效振型参与系数上不同。等效振型参与因子是与广义质量成反比,与地震干扰因子成正比,与振型函数相关的量;

(4) α 越大,剪切刚度取 $G(z)=G_0 \exp(\alpha z/h)$ 和 G_L 时的有效振型参与系数 Φ_i 沿深度变化的曲线差距越大;

(5) 当 α 在相当小的一段范围内 ($0 < \alpha \leq 0.5$),可按剪切波速取为平均值的匀质场地土体系来计算动力反应。

[参考文献]

- [1] Idriss I M, Seed H B. Seismic response of horizontal soil layers[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1968, 94(4): 1003-1031.
- [2] Davis R. Effects of weathering on site response[J]. Earthquake Engineering and Structure Dynamics, 1995, 24(2): 301-309.
- [3] Zhao J X. Estimating modal parameters for a simple soft-soil site having a linear distribution of shear wave velocity with depth[J]. Earthquake Engineering and Structure Dynamics, 1996, 25(2): 163-178.
- [4] Zhao J X. Modal analysis of soft-soil sites including radiation damping[J]. Earthquake Engineering and Structure Dynamics, 1997, 26(1): 93-113.
- [5] 栾茂田, 金崇磐, 林阜. 非均质地基振动特性及地震反应分析[J]. 大连理工大学学报, 1992, 32(1): 81-87.
- [6] 栾茂田, 刘占阁. 成层场地振动特性及地震反应简化解析解的完整形式[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(6): 747-749.
- [7] 楼梦麟. 变参数土层的动力特性和地震反应分析[J]. 同济大学学报, 1997, 25(2): 155-160.
- [8] 李刚, 任慧, 尚守平. 上覆非线性场地的振动分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2003, 30(6): 86-89.
- [9] 王爱勤, 王春玲. 指数函数模量成层地基上变截面坝的随机地震反应分析[J]. 西北地震学报, 2008, 30(1): 31-35.
- [10] Ballard R F, Casagrande D R. Dynamic foundation investigation, TAA-2A Radar site, Cape Kennedy, Florida[A]// WES, Misc. Paper[C]. 1967: 4-878.
- [11] 克拉夫 R W, 彭津 J. 结构动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1981: 365.
- [12] 廖振鹏. 工程波动理论导论(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 67-75.