

热带有限区分裂半隐式斜压 初始方程预报模式*

王康玲 薛纪善 梁炎钊

(广东省热带海洋气象研究所)

提 要

本文提出一个采用分裂半隐式时间积分方案的热带有限区多层初始方程数值预报模式。业务预报试验表明模式的计算稳定性较好,预报作业时间较显式方案缩短约三分之二,对热带天气系统有一定预报能力。为了弥补热带大洋上探空资料不足,还试验了插补其他来源的资料,效果也较好。

一、引 言

热带有限区数值预报虽然在国内已进行了多年的试验研究^[1],但至今仍只有一个正压模式能用于业务预报。其原因当然是多方面的,例如资料不足等等。然而最大的障碍却是过去提出的一些模式方案不能适应承担预报的业务部门在有限的计算能力条件下,快速作出预报的要求。为了利用有限的计算能力,在保证一定预报精度(包括恰当的水平与垂直分辨率)的前提下,尽可能地缩短业务预报的作业时间,自然希望延长时间步长。但在过去使用的显式时间积分方案里,为了保证计算稳定,加大时间步长必须同时加大空间步长,这意味着空间分辨率降低,是与我们的愿望相违背的。而一个无条件稳定的隐式时间积分方案,在我们功能有限的计算机上几乎是不可能实现的。

本文中我们按照近几年在数值预报领域应用日趋广泛的分裂算法的思想,并参考Burridge^[12]的做法,提出一个分裂半隐式的热带有限区斜压初始方程模式。根据实际预报试验,这个模式的计算时间比类似的显式方案缩短了近三分之二,计算稳定性较好,对热带天气系统有一定预报能力。

在本文的第二至第五节,我们将详细地描述这一模式,第六节给出利用这一模式作预报试验的几个例子,最后在第七节就这一模式及热带数值预报的有关问题作一些讨论。

二、基本方程

采用麦卡托地图投影,投影放大系数 $m = \sec\varphi$, φ 是纬度。以 1000 hPa 与 100 hPa 等压面作为大气的下、上界面,垂直边界条件是在这两个等压面上 $\omega = 0$ 。水平运动方程为:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -N_u + F_u \quad (1)$$

* 本文于1984年2月20日收到,1985年6月29日收到修改稿。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU + \frac{\partial \phi}{\partial y} = -N_v + F_v \quad (2)$$

其中 $U \equiv u/m, V \equiv v/m$

$$\begin{aligned} N_v &\equiv m^2 \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \omega \frac{\partial U}{\partial p} \\ N_v &\equiv m^2 \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \omega \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{(U^2 + V^2)}{2} \frac{dm^2}{dy} \\ F_v &\equiv \mu_v m \nabla^2 U - \frac{g}{m} \frac{\partial \tau_x}{\partial p} \\ F_v &\equiv \mu_v m \nabla^2 V - \frac{g}{m} \frac{\partial \tau_y}{\partial p} \end{aligned}$$

u, v 是风的纬向与经向分量, ϕ 是位势高度, f 是柯氏参数。 μ_v 是速度的水平扩散系数, τ_x, τ_y 是摩擦应力。这些参数的取法与[1]相同。

热力学方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \left[p^{\kappa-1} \frac{\partial}{\partial p} \left(p^{1-\kappa} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right) \right] \omega = -N'_\phi + F_\phi \quad (3)$$

这里 $N'_\phi \equiv m^2 \left(U \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right)$

$$F_\phi \equiv m^2 \mu_\phi \nabla^2 \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right), \quad \kappa = R/C_p$$

μ_ϕ 是热量的水平扩散系数, 取法也与[1]相同。为了适应半隐式解法的需要, 我们将(3)的左端第二项中的线性部分(是主要的)与非线性部分区分开来。为此引进一个作为参考状态的静止大气:

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(p)$$

使 $p^{\kappa-1} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^{1-\kappa} \left\{ \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \left(-\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial p} \right) \right\} \right]$ 是一个相对小量。若记

$$\Gamma \equiv p^{\kappa-1} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^{1-\kappa} \left(-\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial p} \right) \right] \quad (4)$$

则(3)可以改写成:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \Gamma \omega = -N_\phi + F_\phi \quad (5)$$

$$N_\phi \equiv N'_\phi + \left\{ p^{\kappa-1} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^{1-\kappa} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] - \Gamma \right\} \omega$$

为了简单起见, 我们取 300 K 的等温大气作为参考状态, 这时

$$\Gamma = -\frac{\kappa R T_0}{p^2}, \quad T_0 = 300 \text{ K} \quad (6)$$

连续方程取它对 p 的微分形式:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \frac{\partial D}{\partial p} = 0 \quad (7)$$

D 是水平速度散度。

根据下边界条件, 我们可以得到一个 1000 hPa 等压面的高度倾向方程:

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial t} = -N_{\phi 4} \quad (8)$$

式中我们用下标 4 表示 1000 hPa 等压面, 而

$$N_{\phi 4} \equiv m^2 \left(U \frac{\partial \phi_4}{\partial x} + V \frac{\partial \phi_4}{\partial y} \right) \quad (9)$$

方程(1)、(2)、(5)、(7)、(8)构成我们模式的基本方程组。

三、垂直方向离散化后的矢量形式方程

采用不等距垂直分层。分层的情况与因变量所定义的高度如图 1 所示。由于(8)不含水平散度, 故 U_4, V_4, ϕ_4 可以单独求解。对于 $(U, V, \phi)_{1,2,3}$ 我们将其控制方程写成矢量形式, 以便于后面构造差分格式。

令 $\Delta p = 300$ hPa, 并引入如下记号

$$U \equiv (U_1, U_2, U_3)^T$$

$$V \equiv (V_1, V_2, V_3)^T$$

$$\phi \equiv (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$$

$$\omega \equiv (\omega_{1.5}, \omega_{2.5}, \omega_{3.5})^T$$

$$R_U \equiv (-N_{U1} + F_{U1}, -N_{U2} + F_{U2}, -N_{U3} + F_{U3})^T$$

$$R_\phi \equiv \left((-N_{\phi 1.5} + F_{\phi 1.5}) \Delta p, (-N_{\phi 2.5} + F_{\phi 2.5}) \Delta p, (-N_{\phi 3.5} + F_{\phi 3.5}) \frac{\Delta p}{2} \right)^T$$

$$R_V \equiv (-N_{V1} + F_{V1}, -N_{V2} + F_{V2}, -N_{V3} + F_{V3})^T$$

$$\phi_4 \equiv (0, 0, \phi_4)^T, \quad D_4 \equiv (0, 0, \Delta p D_4)^T$$

$$D \equiv m^2 \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \right)$$

在垂直方向的各中间层, 用中央差分代替垂直方向的微分, 而在上、下底面用单向差分代替微分, 从而将变量在垂直方向离散化。经过整理后, 得:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV + \frac{\partial \phi}{\partial x} = R_U \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU + \frac{\partial \phi}{\partial y} = R_V \quad (12)$$

$$A \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Gamma \omega = \frac{\partial \phi_4}{\partial t} + R_\phi \quad (13)$$

$$A_1 \omega = -\Delta p A D + D_4 \quad (14)$$

其中

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

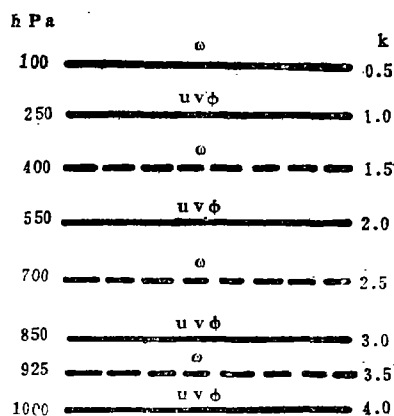


图 1 模式垂直分层与因变量定义高度

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -0 \\ -1 & 7/3 & -4/3 \\ 0 & -4/3 & 16/3 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} \Delta p \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta p \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta p}{2} \Gamma_3 \end{pmatrix}$$

将连续方程(14)代入热力学方程(13),得

$$A \frac{\partial \phi}{\partial t} + B D = B_1 D_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + R_1 \quad (15)$$

其中: $B \equiv -\Delta p \Gamma A_1^{-1} A$, $B_1 \equiv -\Delta p \Gamma A_1^{-1}$

方程(11)、(12)、(15)就是我们要进行时间积分的矢量形式预报方程。

四、分裂半隐式时间积分方案的构造

1. 显式积分非线性项

此时方程组为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= R_u \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= R_v \\ A \frac{\partial \phi}{\partial t} &= B_1 D_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + R_1 \end{aligned} \quad (16)$$

对(16)采用欧拉后差求解。计算中的非线性项用通常的空间中央差分的平均来计算。例如

$$N_u = m^2 (\overline{U^* U_x^*} + \overline{V^* U_y^*}) + \overline{\omega U^*} \quad (17)$$

通过这一步积分得到三个“平流了”的场 $\tilde{U}^{n+1}$, $\tilde{V}^{n+1}$, $\tilde{\phi}^{n+1}$ 。

2. 隐式积分重力波项

此时方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - f V + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + f U + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + G_0 D &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

这里:

$$G_0 \equiv A^{-1} B \quad (19)$$

这一步积分的初值即前面所得到的“平流了”的场。利用梯形公式,并经过消元,得到:

$$\begin{aligned} \phi^* - \frac{m^2 \Delta t^2}{4} G_0 \left[\frac{1}{1+\epsilon^2} \Delta \phi^* + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{1+\epsilon^2} \right) \frac{\partial \phi^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \right) \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right] \\ = - \frac{m^2 \Delta t}{2} G_0 \left[\frac{\partial}{\partial x} (H_u + 2 \tilde{U}^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial y} (H_v + 2 \tilde{V}^{n+1}) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\phi^* \equiv \phi^{n+1} - \tilde{\phi}^{n+1}, \quad \varepsilon \equiv \Delta t \cdot f/2$$

$$H_u \equiv \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left[2\varepsilon (\tilde{V}^{n+1} - \varepsilon \tilde{U}^{n+1}) - \Delta t \left(\frac{\partial \tilde{\phi}^{n+1}}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\phi}^{n+1}}{\partial y} \right) \right]$$

$$H_v \equiv \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left[-2\varepsilon (\tilde{U}^{n+1} + \varepsilon \tilde{V}^{n+1}) - \Delta t \left(\frac{\partial \tilde{\phi}^{n+1}}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\phi}^{n+1}}{\partial x} \right) \right]$$

由于 G_0 不是一个对角矩阵, (20) 不易求解。为此作线性变换。先求得 G_0 的三个特征值及相应的特征向量 C_k^2 与 $e_k (k=1, 2, 3)$ 。在我们所使用的等温大气中, G_0 的三个特征值分别是 10214.175, 2080.999, 237.810, 它们分别对应三类惯性重力波的波速 101.065, 45.618, 15.421(m/s)。若记

$$E_0 \equiv (e_1, e_2, e_3), \quad C_0 \equiv \text{diag}(C_1^2, C_2^2, C_3^2) \quad (21)$$

作线性变换

$$Z \equiv E_0^{-1} \phi^* \quad (22)$$

(22) 代入 (20), 得到:

$$\begin{aligned} Z - \delta^2 C_0 \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \Delta Z + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{1+\varepsilon^2} \right) \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \right) \frac{\partial Z}{\partial x} \right] \\ = H_z \end{aligned} \quad (23)$$

$$H_z \equiv -m\delta E_0^{-1} G_0 \left[\frac{\partial}{\partial x} (H_u + 2\tilde{U}^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial y} (H_v + 2\tilde{V}^{n+1}) \right]$$

$$\delta \equiv \frac{m\Delta t}{2}$$

由于 C_0 是一个对角矩阵, (23) 相当于三个标量方程。(23) 进行整理后得到 Z 的第 $k (k=1, 2, 3)$ 个分量的方程为:

$$\Delta Z_k + \frac{b}{a} \frac{\partial Z_k}{\partial y} + \frac{c}{a} \frac{\partial Z_k}{\partial x} - \frac{1}{a\delta^2 C_k^2} Z_k = -\frac{1}{\delta a} H_{zk} \quad (24)$$

$$a \equiv \frac{1}{1+\varepsilon^2}, \quad b \equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{1+\varepsilon^2} \right), \quad c \equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \right)$$

这是一个椭圆型方程, 非齐次项由 $\tilde{U}^{n+1}$, $\tilde{V}^{n+1}$, $\tilde{\phi}^{n+1}$ 求得。采用松弛法求解, 迭代初值由 Green 函数方法^[3]求得。迭代松弛系数取 1.33333。一般迭代六次左右即可达到预期要求。由 Z 再根据 (22) 求得 ϕ^* , 进而得到 U^{n+1} , V^{n+1} , ϕ^{n+1} , 从而完成一步时间积分。

运算中显式与隐式时间步长均取 30 min。计算表明隐式计算较好地保持了能量的守恒性质。整个计算是稳定的。

五、预报系统的其他细节

模式的水平区域自 28.7°S—45.3°N, 50°E—167°E, 水平格距 333 km, 整个预报区域包含 1120 个格点。

初始资料取自探空与地面气象报告。为了弥补热带洋面上观测资料的不足, 又试验插入欧洲中期预报中心发布的格点风资料。

取固定边界条件。由于在边界点上, 扩散系数增大, 边界对预报场的影响减小了。在

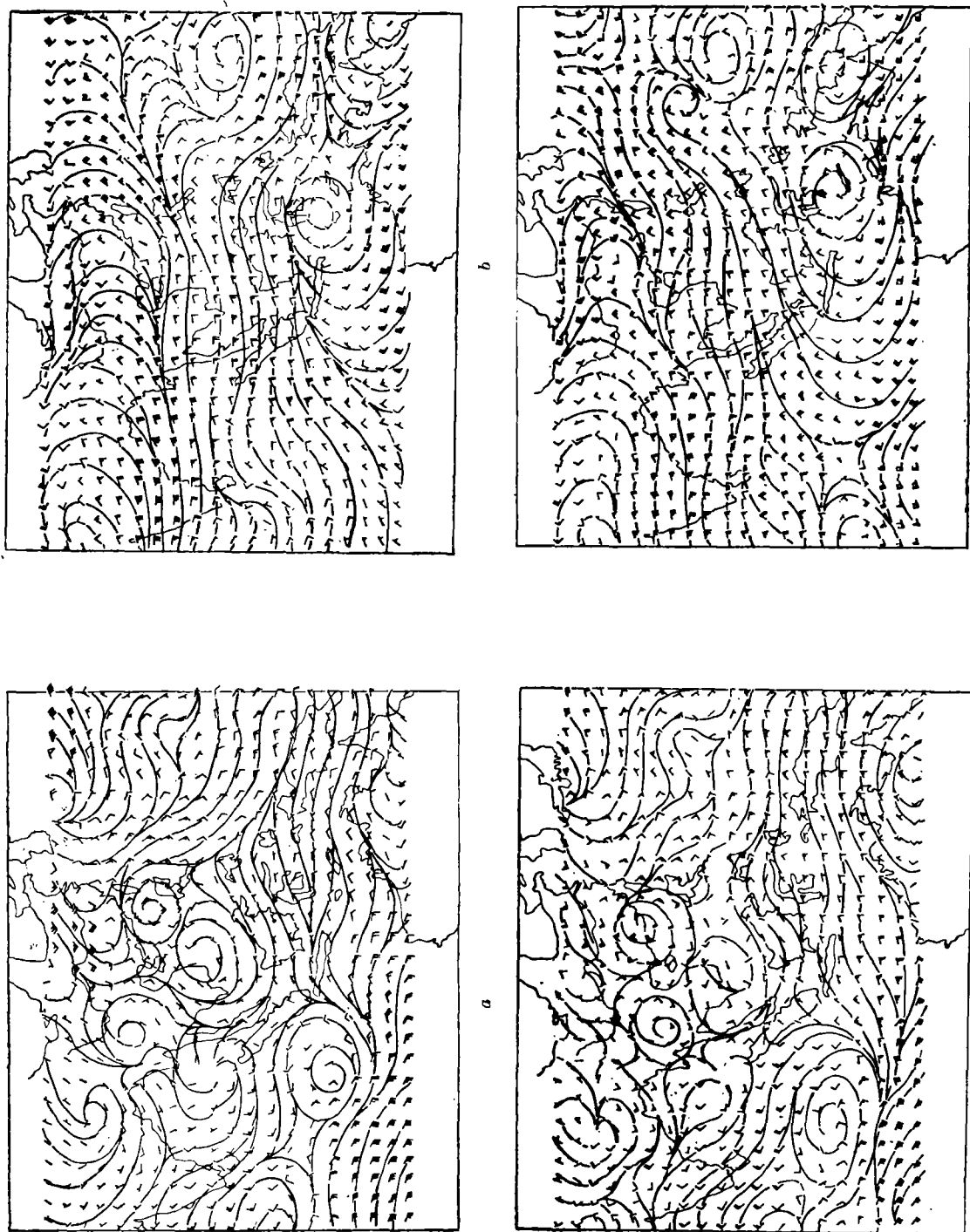


图 2 1984 年 7 月 7 日—8 日预报实例

(a. 850 hPa 流场预报, b. 850 hPa 流场分析,

c. 200 hPa 流场预报, d. 200 hPa 流场分析)

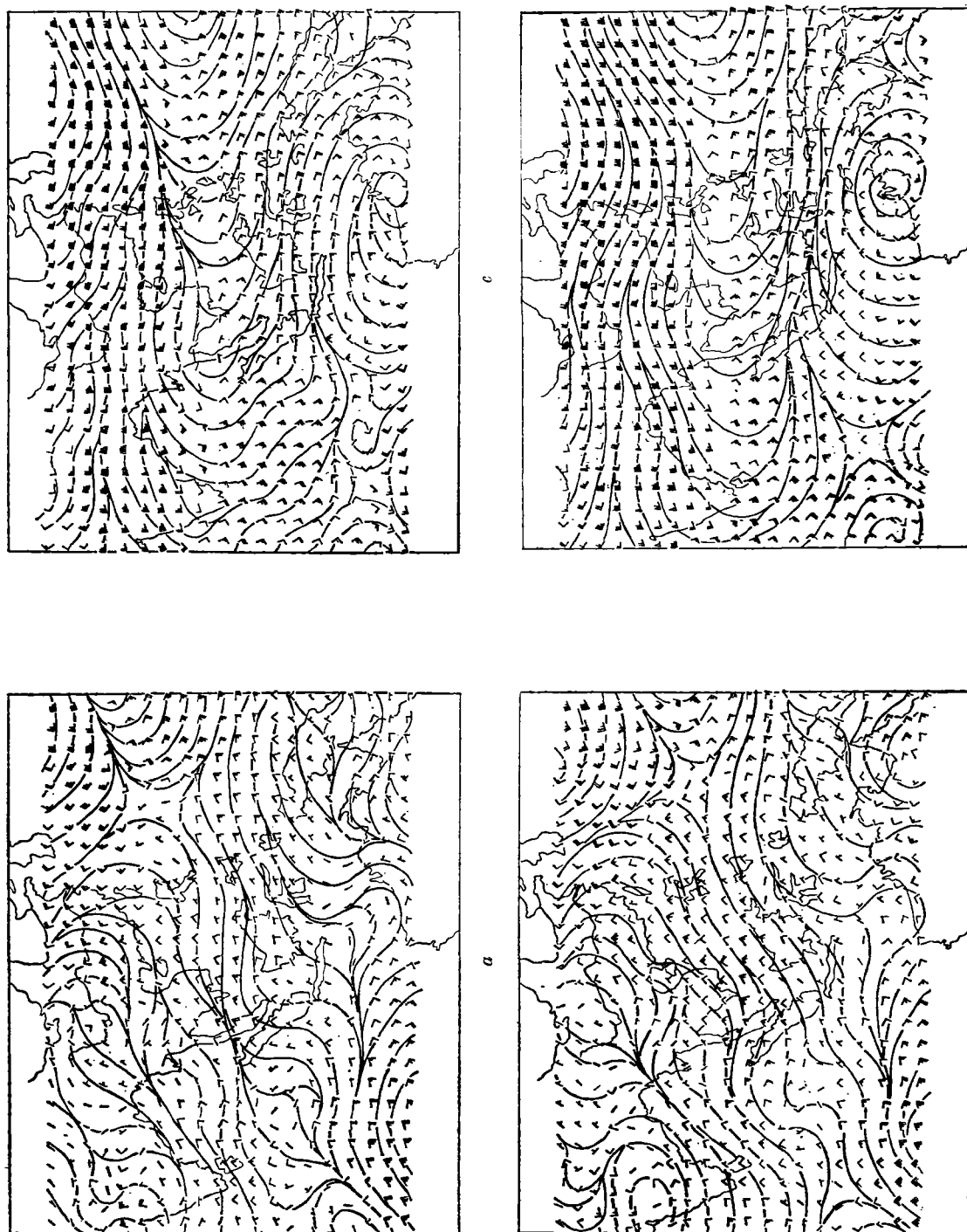


图 3 1985 年 1 月 29 日—30 日预报实例

积分过程中不再作任何形式的空间平滑。

预报产品是 200, 500, 850 与 1000 hPa 的风与高度, 由垂直方向的内插得到。整个预报作业时间比同样空间分辨率的显式方案缩短三分之二。

六、预 报 实 例

上述预报模式在广东热带海洋气象研究所 DJS-220 计算机上, 利用实时资料, 作了近一年实例计算, 作业时间可以适应业务预报需要。结果表明模式对热带天气系统确有一定预报能力。现给出几个任意选取的实例。

第一个例子是 1984 年 7 月 7 日—9 日的预报实例。这里仅给出 850 hPa 与 200 hPa 的 24 小时流场预报与实况 (见图 2)。其余图略。这是一次热带辐合带上两个台风发展北上的天气过程。高空南亚高压中心稳定在印度北部, 北半球中纬度槽在 105°E 左右。在整个预报时段内 200 hPa 形势变化较小, 只是在菲律宾以东 8 日有一个高空气旋发展。在低空, 7 日热带辐合带在 20°N 以南, 其上南海有一台风, 140°E 以东有一个气旋。8 日整个热带系统北抬, 越赤道气流主要位于马来西亚附近。赤道缓冲带建立并北上, 其北方辐合带里南海台风朝西北方向移动。同时西太平洋的气旋加强成台风并北移。9 日两个台风继续北上。从预报图看, 整个形势演变, 包括赤道缓冲带与热带辐合带的动向都报得较好, 南海台风的路径也与实况基本一致。只是 140°E 以东的台风在预报中只是一个槽, 这与我们的模式中不包括非绝热过程有关。

第二个例子是 1985 年 1 月 29 日—31 日的预报。这里依然只给出 850 hPa 与 200 hPa 24 小时流场预报与实况。在高空这是一次东亚横槽转向的过程。在低空, 南、北半球的副

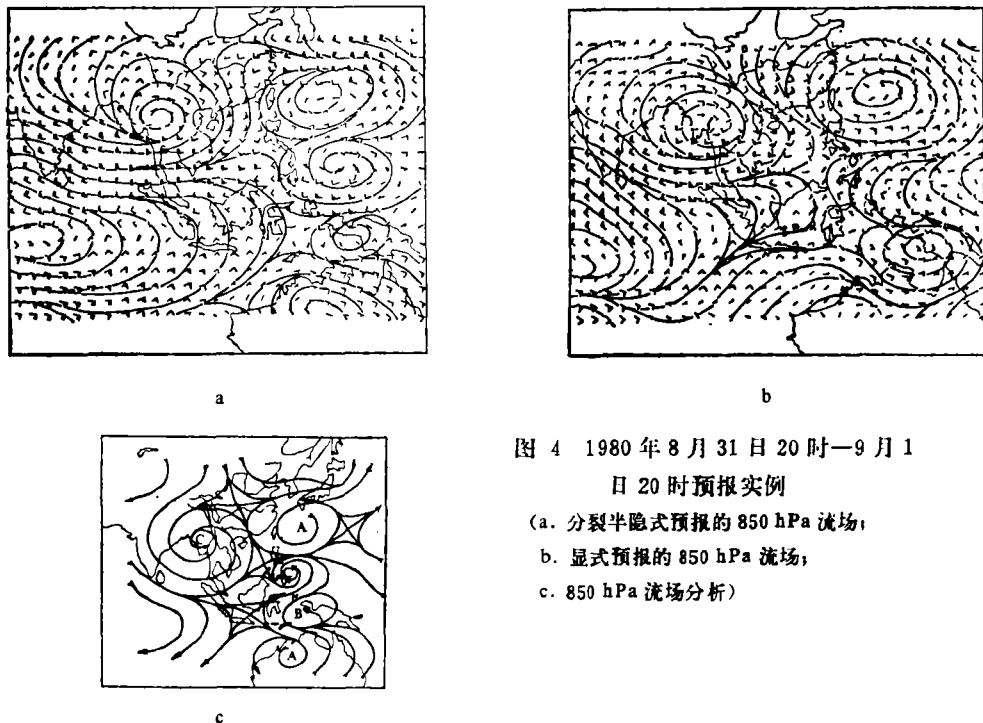


图 4 1980 年 8 月 31 日 20 时—9 月 1

日 20 时预报实例

- (a. 分裂半隐式预报的 850 hPa 流场;
- b. 显式预报的 850 hPa 流场;
- c. 850 hPa 流场分析)

高比较稳定且近于对称。中纬度冷空气自河套南下直达华南。从预报图看, 这次高空横槽转向导致冷空气南下的过程也报得较好。

为了了解分裂半隐式差分对预报结果的影响, 我们又对比了[1]的显式方案与本文所提出的模式方案的预报结果。图4是1980年9月1日的例子。图中给出两个方案850 hPa 24小时预报与实况。由于该日没有客观分析的结果, 故实况图取自广东省气象台的热带流场分析图。由图可以看出, 两者预报的天气系统分布特征基本无区别。只是本文模式所预报的菲律宾附近的气旋与澳大利亚附近的反气旋, 在显式方案里分别被预报成槽与脊。显然本文模式的结果与实况更接近一些。两个格式的这种差别的原因还不清楚, 有待今后作进一步的分析。

七、讨 论

1. 根据我们的试验结果, 分裂半隐式是一个有突出长处的时间积分方案。它允许我们在保证足够预报精度的前提下, 延长时间步长, 从而缩短预报作业时间, 并保证计算稳定。这些特点对于计算能力有限, 但对预报时效要求又较高的业务部门尤其有价值。

2. 积分惯性重力波过程的隐式计算方案仅仅对于二维问题才是容易实现的。在斜压模式中, 为了采用半隐式方案又不造成大的计算上的困难, 需要把问题化为二维的。为此引入一个标准层结大气, 利用由此得到的标准波型, 使问题得以简化。目前使用的是等温大气。更好的近似及其对预报结果的影响, 有待今后作更多的试验。

3. 热带地区, 特别是广大的热带洋面上, 缺乏常规观测资料。这给热带数值预报带来了很大困难。虽然还有一些非常规资料可以利用, 但它们的处理与同化也是很困难的。前面已提到我们试验将欧洲中期预报中心(ECMWF)的格点风分析资料与实测资料混合使用。虽然目前只插补了200 hPa与850 hPa的风的资料, 但包括500 hPa在内, 预报结果均有明显改善。看来这是目前克服资料不足的困难的比较有效的途径。当然从长远讲, 为了彻底解决热带数值预报的资料来源, 必须建立一个热带洋面上的资料搜集与处理系统。

4. 边界值的取法无论对显式还是隐式计算均有很大影响。目前使用固定边界条件, 虽然可以使计算稳定, 但靠近边界处的流场预报与实况偏离较大。显然边界条件的提法是热带有限区数值预报模式中一个值得探讨的问题。特别是为了恰当地反映中纬度槽脊的影响, 南、北边界具有重要意义。

5. 我们目前的模式没有包括地形与凝结加热作用。后者部分地是因为湿度资料的获取与分析是十分困难的。解决好这些课题无疑会进一步改善预报结果。这些都有待于今后的努力。

参 考 文 献

- [1] 陈隆勳等, 一个四层初始方程热带数值预报模式的初步结果, 《第二次全国数值预报会议论文集》, 127—136, 科学出版社, 1980。
- [2] Burridge, D. M., A split semi-implicit reformulation of the Bushby-Timpson 10-level model, *Quart. J. R. Met. Soc.*, 101, 777—792, 1975.
- [3] 陈雄山等, 始方程三层模式, 《数值预报和数理统计预报会议论文集》, 1—18, 科学出版社, 1974

SPLIT SEMI-IMPLICIT INTEGRATION OF TROPICAL LIMITED AREA MULTI-LEVEL PRIMITIVE EQUATION MODEL

Wang Kangling Xue Jishan Liang Yanzhao

(Guangdong Institute of Tropical Marine Meteorology)

Abstract

A tropical limited area multi-level primitive equation model, in which the time integral is performed with a split semi-implicit scheme, is presented. The operating time is shortened to one-third of the time the explicit scheme needs. The results of operational experiments show that the model is stable in computation and capable of producing acceptable forecast for tropical systems. Besides synoptic reports, data derived from other sources are used so as to improve the forecast, especially over tropical oceans where conventional data is scarce.