

地震震级和地震间隔时间的统计分布研究^{*}

范琦

(空军工程大学电讯工程学院, 陕西 西安 710077)

摘要: 依据最大熵原理求解出地震震级和地震间隔时间的最可几分布为威布尔(Weibull)分布. 以甘肃天祝地区为例, 应用极值分布模型、对数正态分布模型和威布尔分布模型以及K-S检验和直方图检验2种方法, 分别对该地区实际地震数据进行检验, 所得结果与理论求解结果一致.

关键词: 震级; 地震间隔时间; 威布尔分布; 最大熵原理; 最可几分布

中图分类号: P315.5 文献标识码: A 文章编号: 1000-0844(2001)01-0007-06

0 引言

自从概率统计方法被引入到地震预报研究中以来, 许多学者对地震三要素的统计规律进行了不同程度的研究. 对某一时空尺度内的地震三要素整体状态的描述或整体统计规律的研究对于地震预报是非常重要的. 一些学者通过对实际数据的检验和拟合得出地震震级和地震间隔时间服从威布尔(Weibull)分布, 但没有从理论上进行分析. 本文用最大熵原理分析了地震震级和地震间隔时间的分布规律.

1 最大熵原理

熵在物理意义上是表示系统混乱程度的量. 系统越混乱, 则系统的熵越大, 系统越趋于热平衡. 熵还可以表示各种随机变量的不肯定性程度. 不肯定程度越大, 则随机变量的信息熵越大. 根据最大熵原理, 在一定的约束条件下, 能使熵极大化的分布就是随机变量的最可几分布.

连续变量的熵可写为^[1]:

$$H = -C \int_a^b P(x) \ln P(x) dx$$

其中: C 通常取为1; b 和 a 为 x 的上下限; $P(x)$ 为概率密度函数. 这里要求:

$$1 = \int_a^b P(x) dx, \quad P(x) \geq 0$$

一般地要使熵达到极大, 除了上式的约束条件外, 其它的约束条件经常以变量 x 的某种函数 $f(x)$ 的平均值为已知值的形式出现. 如果有 m 个约束条件 ($m < n$), 就是说 m 个 x 的已知函数 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ 都有事先确定的平均值 $F_1, F_2, \dots, F_m$, 即

$$F_k = \int_a^b f_k(x) P(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

由上面的已知条件, 可证明在熵 H 最大时的配分函数为:

$$Z = \int_a^b \exp \left[- \sum_{k=1}^m \beta_k f_k(x) \right] dx \quad (1)$$

最可几分布为:

$$P(x) = \frac{1}{Z} \exp \left[- \sum_{k=1}^m \beta_k f_k(x) \right] \quad (2)$$

式中: β_k 为待定常数.

2 地震震级和地震间隔时间的最可几分布求解

震级是描述地震释放能量相对大小的物理量. 它的值大于或等于零. 但在实际的记录中或在研究中为了保证地震资料的完整性, 一般取震级 $M \geq \delta$ ($\delta > 0$). 对于地震间隔时间 ΔT , 一般取 $\Delta T > 0$, 但如果选取特殊资料时, 间隔时间可取 $\Delta T \geq \delta$ ($\delta > 0$). 因此可用同一个随机变量 X 来表示震级 M 和间隔时间 ΔT 的均值 u 是有限的, 即:

$$u = \int_{\delta}^{\infty} x P(x) dx \quad (3)$$

其中: $P(x)$ 为震级和间隔时间的最可几分布; $f(x) = x$.

将式(3)代入配分函数式(1), 得:

$$Z = \int_{\delta}^{\infty} e^{-\beta_1 x} dx = \frac{1}{\beta_1} e^{-\beta_1 \delta} \quad (4)$$

将式(4)代入式(2), 得:

$$P(x) = \beta_1 e^{\beta_1 \delta} e^{-\beta_1 x} = \beta_1 e^{-\beta_1 (x - \delta)} \quad (5)$$

将式(5)代入式(3)得:

$$u = \int_{\delta}^{\infty} x \beta_1 e^{-\beta_1 (x - \delta)} dx = \int_{\delta}^{\infty} (x - \delta) \beta_1 e^{-\beta_1 (x - \delta)} d(x - \delta) + \int_{\delta}^{\infty} \delta \beta_1 e^{-\beta_1 (x - \delta)} dx$$

因为

$$\int_{\delta}^{\infty} P(x) dx = 1$$

所以

$$\int_{\delta}^{\infty} \delta \beta_1 e^{-\beta_1 (x - \delta)} dx = \delta$$

故

$$u = \int_{\delta}^{\infty} (x - \delta) \beta_1 e^{-\beta_1 (x - \delta)} d(x - \delta) + \delta$$

令 $x - \delta = x'$, 于是得:

$$u = \int_0^{\infty} x' \beta_1 e^{-\beta_1 x'} dx' + \delta = \frac{\Gamma(2) \beta_1}{\beta_1^2} + \delta = \frac{1}{\beta_1} + \delta$$

$$\beta_1 = \frac{1}{u - \delta} \quad (6)$$

所以将式(6)代入式(5)得:

$$P(x) = \frac{1}{u - \delta} e^{-\frac{x - \delta}{u - \delta}} \quad (7)$$

令 $u - \delta = \beta$, 则

$$P(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x - \delta}{\beta}} \quad (8)$$

式(8)是双参数威布尔分布的概率密度函数. 该式说明震级 M 和间隔时间 ΔT 服从双参数威布尔分布. 如果 δ 取为零, 则式(8)变为:

$$P(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad (9)$$

对震级 M 而言, 式(9) 就相当于古登堡 - 里克特公式, 其中:

$$\beta = \frac{1}{b \ln 10}$$

对地震间隔时间而言, 式(8)则说明地震过程是一个泊松过程. 由于三参数威布尔分布有更广泛的适应性, 所以用它来描述地震间隔时间 ΔT 和震级 M 的统计分布规律.

三参数威布尔分布的密度函数为^[2]:

$$W(x, \alpha, \beta, \delta) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x - \delta}{\beta} \right)^{\alpha-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x - \delta}{\beta} \right)^{\alpha} \right\} \tag{10}$$

其中: α 、 β 和 δ 分别为威布尔分布的形状参数、尺度参数和位置参数.

大多数学者认为, 地震是由于应力积累到超过岩石抗剪强度时形成的. 从这个观点出发, 可以认为震级 M 应与岩石强度成正比. 因此, 震级 M 的分布形式应与岩石强度的分布形式相同或相似.

研究表明^[3], 岩石强度 x 的概率分布函数 $F(x)$ 和概率密度函数 $f(x)$ 可用下式表示:

$$F(x) = 1 - \exp \left[- \frac{\nu}{\nu_0} \left(\frac{x - x_0}{\beta} \right)^{\alpha} \right]$$
$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right) \left(\frac{x - x_0}{\beta} \right)^{\alpha-1} \exp \left[- \frac{\nu}{\nu_0} \left(\frac{x - x_0}{\beta} \right)^{\alpha} \right]$$

式中: ν 和 ν_0 分别是岩石体积及其标准值; x_0 为试样内强度 x 的最小值; α 和 β 为威布尔分布的形状参数和尺度参数.

图1 给出了西松(1983) 用伊豆的青石做的无侧限抗压强度及无侧限抗拉强度的试验结果. 图中的包络线是由威布尔分布模型拟合得出的. 由图1 可以看出, 用威布尔分布描述震级 M 的分布规律是合适的.

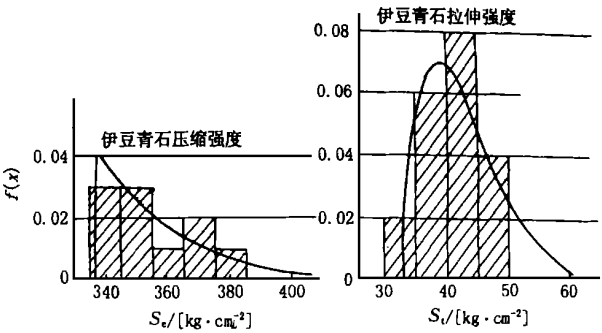


图 1 岩石强度的概率密度分布
Fig. 1 Probability distribution of rock strength.

3 实际检验

3.1 检验方法

3.1.1 直方图检验法

直方图检验法是一种直观的数据分布规律检验法. 其作法为: 用横轴表示数据的大小, 纵轴表示不同组距内的观测数, 其刻度取为组距乘分布密度函数再乘总样本数. 由此可以设想, 如果取更多的样本, 组距取得更小, 则直方图外包络线即为分布密度函数曲线. 用它可以检验数据的分布情况.

3.1.2 K-S 分布拟合检验法

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是从整体中抽取的样本, 它的次序统计量是 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上定义函数:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x_{(1)} \\ \frac{k}{\sqrt{n}} & x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)} \quad k = 1, 2, \dots, (n-1) \\ 1 & x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

$F_n(x)$ 称做总体的经验分布函数或样本分布函数.

检验步骤如下:

- (1) 将 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 由小到大排列, 即 $X_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$, 求出经验分布函数.
- (2) 用样本估计所选分布模型的参数.
- (3) 求 D_n^* .

$$D_n^* = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_0(x)|$$
$$= \max_{-\infty < x < \infty} \left\{ |F_n(x_k) - F_0(x_k)|, |F_n(x_{k+1}) - F_0(x_k)| \right\}$$

其中: $F_0(x)$ 为某已知分布; 令 $x_{n+1} = \infty$, 则 $F_n(x_{n+1}) = 1$; x_k 为 $x_{(k)}$ 的观察值.

- (4) 在已给的显著性水平 α 下查 $D_n^*(\alpha)$, 其近似值如表 1 所示.

若 $D_n^* > D_n^*(\alpha)$, 则否定原假设, 否则接受原假设.

表 1 $D_n^*(\alpha)$ 的近似值

n	$D_n^*(\alpha)$			
	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
10	0.32	0.37	0.41	0.49
20	0.23	0.26	0.29	0.36
30	0.19	0.22	0.24	0.29
40	0.17	0.19	0.21	0.25
50	0.15	0.17	0.19	0.23
大于 50	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

3.2 检验结果

以甘肃天祝地区为例, 研究范围取 $36^{\circ} \sim 38^{\circ} \text{N}$, $102^{\circ} \sim 104^{\circ} \text{E}$; 研究时段为 1970~1990 年, 时间窗为 2 年.

根据作者总结出的震级与余震区等效半径和余震持续时间 的关系, 对地震目录中的余震进行删除. 将删除余震后的目录作为研究资料. 应用极值分布模型、对数正态分布模型和威布尔分布模型分别进行检验.

3.2.1 震级数据的检验

3.2.1.1 K-S 检验

极值分布模型、对数正态分布模型和威布尔分布模型的拟合结果见表 2. 由表 2 可以看出, 极值分布模型拟合结果的通过率为 0.7, 对数正态分布模型拟合结果的通过率仅为 0.2, 威布尔分布模型拟合结果的通过率为 0.9. 因此威布尔分布是描述震级的较合适的模型.

表 2 三种模型拟合结果

时间段	数据个数	极值分布模型			对数正态分布模型			威布尔分布模型		
		D_n^*	$D_n^*(0.05)$	检验结果	D_n^*	$D_n^*(0.05)$	检验结果	D_n^*	$D_n^*(0.05)$	检验结果
1970~1972 年	78	0.10	0.15	通过	0.14	0.15	通过	0.11	0.15	通过
1972~1974 年	173	0.10	0.10	通过	0.14	0.10	不通过	0.07	0.10	通过
1974~1976 年	151	0.10	0.11	不通过	0.18	0.11	不通过	0.09	0.11	通过
1976~1978 年	117	0.09	0.13	通过	0.14	0.13	不通过	0.06	0.13	通过
1978~1980 年	99	0.12	0.14	通过	0.17	0.14	不通过	0.09	0.14	通过
1980~1982 年	107	0.10	0.13	通过	0.13	0.13	通过	0.09	0.13	通过
1982~1984 年	124	0.09	0.12	通过	0.14	0.12	不通过	0.10	0.12	通过
1984~1986 年	153	0.08	0.11	通过	0.15	0.11	不通过	0.09	0.11	通过
1986~1988 年	268	0.14	0.08	不通过	0.21	0.08	不通过	0.11	0.08	不通过
1988~1990 年	254	0.12	0.09	不通过	0.19	0.09	不通过	0.09	0.09	通过
通 过 率		7÷10=0.7			2÷10=0.2			9÷10=0.9		

3.2.1.2 直方图检验

为了进一步检验威布尔分布对震级的适用性, 作出了天祝地区 1970~1978 年(时间窗为 2 年)的震级数据直方图, 见图 2. 由图 2 可见, 其检验效果很好.

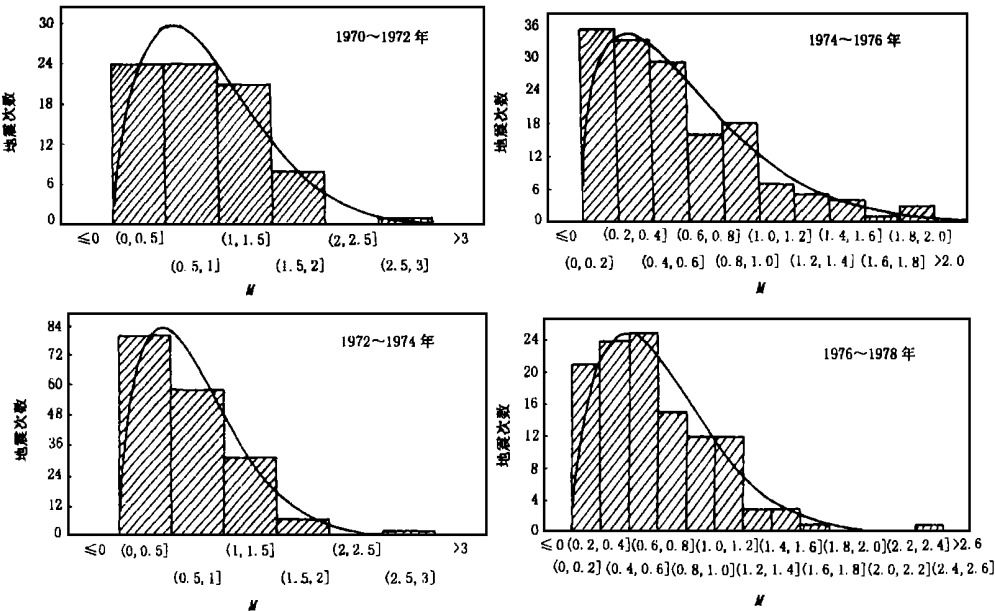


图 2 天祝地区地震强度的威布尔分布检验

Fig.2 Weibull distribution test for earthquake magnitude of Tianzhu region, Gansu province.

3.2.2 地震间隔时间的检验

3.2.2.1 K-S 检验

极值分布模型、对数正态分布模型和威布尔分布模型的拟合结果见表 3. 由表 3 可以看出, 极值分布模型拟合结果的通过率为 0.1, 对数正态分布模型拟合结果的通过率为 0, 威布尔分布模型拟合结果的通过率为 0.6. 由此可见, 威布尔分布对于描述地震间隔分布是较为合适的.

表 3 三种模型拟合结果

年 段	数据 个数	极值分布模型			对数正态分布模型			威布尔分布模型		
		D_n^*	$D_n^*(0.05)$	检验 结果	D_n^*	$D_n^*(0.05)$	检验 结果	D_n^*	$D_n^*(0.05)$	检验 结果
1970~1972 年	78	0.17	0.15	不通过	0.36	0.15	不通过	0.09	0.15	通过
1972~1974 年	173	0.19	0.10	不通过	0.37	0.10	不通过	0.14	0.10	不通过
1974~1976 年	151	0.19	0.11	不通过	0.37	0.11	不通过	0.14	0.11	不通过
1976~1978 年	117	0.13	0.13	通过	0.39	0.13	不通过	0.10	0.13	通过
1978~1980 年	99	0.16	0.14	不通过	0.37	0.14	不通过	0.10	0.14	通过
1980~1982 年	107	0.14	0.13	不通过	0.39	0.13	不通过	0.09	0.13	通过
1982~1984 年	124	0.16	0.12	不通过	0.38	0.12	不通过	0.12	0.12	通过
1984~1986 年	153	0.14	0.11	不通过	0.36	0.11	不通过	0.11	0.11	通过
1986~1988 年	268	0.20	0.08	不通过	0.36	0.08	不通过	0.15	0.08	不通过
1988~1990 年	254	0.18	0.09	不通过	0.38	0.09	不通过	0.14	0.09	不通过
通 过 率		1÷10=0.1			0÷10=0			6÷10=0.6		

3.2.2.2 直方图检验

为进一步检验威布尔分布对描述地震间隔时间的适用性, 同样做出了地震间隔时间数据直方图, 见图 3. 由图 3 可见其检验效果较好.

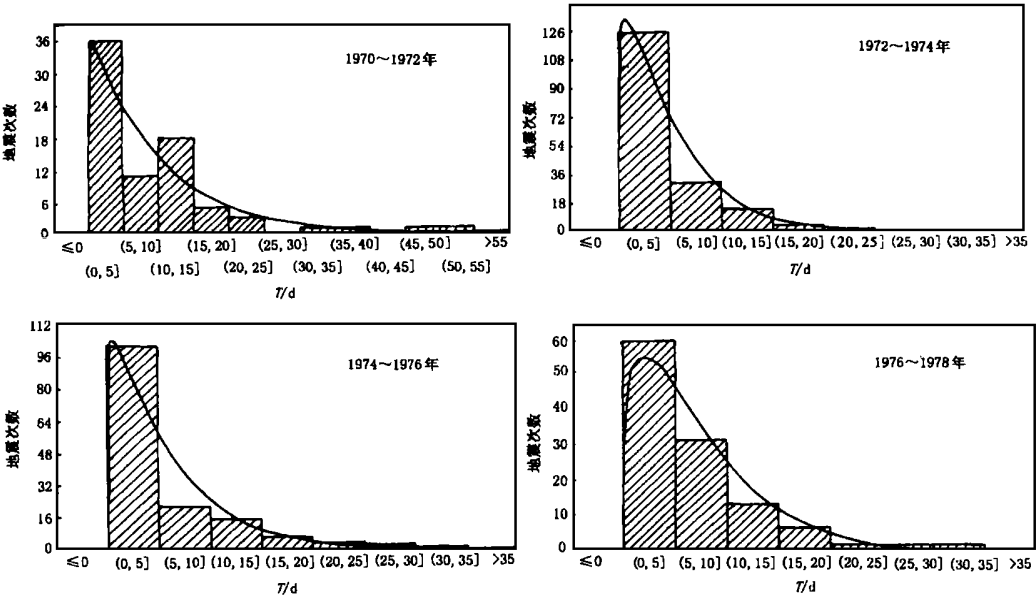


图 3 天祝地区地震间隔时间的威布尔分布检验

Fig. 3 Weibull distribution test for interval time of earthquakes of Tianzhu region, Gansu province.

根据上述的理论推导、试验分析和模型检验结果, 可以认为地震震级和地震间隔时间的变化都服从威布尔分布.

[参考文献]

[1] 张学文, 马力. 熵气象学[M]. 北京: 气象出版社, 1992.
[2] 方开泰, 许建论. 统计分布[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
[3] 戴树森. 可靠性试验及其统计分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 1984.

A STUDY ON STATISTICAL DISTRIBUTION OF MAGNITUDE AND
INTERVAL TIME OF EARTHQUAKE

FAN Qi

(Telecommunication Engineering College, Air Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: According to the theory of greatest entropy, it is found that the most probable distribution of magnitude and interval time of earthquake are Weibull distribution. Using of K-S test and histogram test, actual seismic date about magnitude and interval time of earthquake of Tianzhu region, Gansu province from 1970 to 1990 are inspected with three models. The result obtained is identical with that by the theory.

Key words: Magnitude; Interval time of earthquake; Weibull distribution; Theory of greatest entropy; Most probable distribution