

钟剑, 黄思训, 费建芳, 等. 2011. 模式误差动力特征: 模式参数误差和物理过程描绘缺失误差 [J]. 大气科学, 35 (6): 1169–1176. Zhong Jian, Huang Sixun, Fei Jianfang, et al. 2011. Dynamics of model errors: Accounting for parameters error and physical processes lacking error [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 35 (6): 1169–1176.

模式误差动力特征: 模式参数误差和 物理过程描绘缺失误差

钟剑 黄思训 费建芳 杜华栋

解放军理工大学气象学院, 南京, 211101

摘 要 模式变量初始场误差和模式误差都是制约数值天气预报准确性提高的重要因素, 传统数值预报和变分同化均忽略模式误差的影响。随着研究的深入, 关于模式误差对数值预报影响的研究显得尤为重要。本文从非线性动力方程出发, 推导出在模式存在参数误差和物理过程描绘缺失误差情况下的模式预报误差演变方程及短时间内误差平方均值近似表达式, 并利用 Liouville 方程推导说明模式误差演变并不服从马尔科夫链分布, 该结论对于任意模式系统均成立; 利用 Hopf 分岔动力系统及 Lorenz 系统进行数值实验, 结果表明, 短期内模式预报误差均值随时间呈二次增长; 随着时间增长, 模式预报误差平方均值趋于稳定饱和值; 参数误差和物理过程描绘缺失误差在一定意义下等价。这将为模式预报误差订正及弱约束变分同化研究提供重要理论指导和参考价值。

关键词 参数误差 物理过程误差 Lorenz 系统 变分同化

文章编号 1006-9895 (2011) 06-1169-08

中图分类号 P435

文献标识码 A

Dynamics of Model Errors: Accounting for Parameters Error and Physical Processes Lacking Error

ZHONG Jian, HUANG Sixun, FEI Jianfang, and DU Huadong

Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101

Abstract Initial errors and model errors are the limiting factors to the improvement of the numerical weather prediction (NWP). Traditional NWP and variational data assimilation (VDA) always ignore the influence of model errors, but it is important to investigate the dynamics of model errors for deep research. Based on the nonlinear dynamic model, the model error equation and the mean quadratic error expression for short time which are independent of the particular model are obtained on the assumption that there exist model parameters error and physical processes lacking error in the prediction model, and the non-Markovian character of the probability density of the model error is proved with Liouville equation. Taking the Hopf bifurcating system and Lorenz low-order atmospheric systems as examples, the results indicate that the mean quadratic error is bound to behave like t^2 in a short time; the mean quadratic error tends to a stable value after a long time; the parameters error is equivalent to the physical processes lacking error under certain condition. It will afford valuable information for the research of forecasting error correction and weak constraint VDA from the theoretic aspect.

Key words model parameters error, physical processes lacking error, Lorenz system, variational data assimilation

收稿日期 2010-12-19, 2011-04-28 收修定稿

资助项目 国家自然科学基金资助项目 41005030 和 41175025

作者简介 钟剑, 男, 1984 年出生, 博士研究生, 主要从事反演变分同化研究。E-mail: zhongjianjian2008@163.com

1 引言

目前, 制约数值预报及变分同化精度提高的因素主要有两个: 一是模式变量初始场误差; 二是模式方程组对大气动力和物理过程的刻画和反映程度误差, 即模式本身存在的误差 (简称模式误差)。模式误差主要包括模式参数误差、模式物理过程描绘缺失误差、模式变量时间尺度和空间尺度误差等 (Vannitsem and Toth, 2002; Nicolis, 2003; 聂肃平等, 2010)。

传统数值天气预报及变分同化研究中, 通常假设模式预报方程组能准确描绘大气状态演变过程。随着人们对数值预报精度的要求提高及计算机能力的增强, 在模式变量初始场精度得到很大提高的同时, 模式误差的影响逐渐引起关注 (Vannitsem and Toth, 2002; Nicolis, 2003; Hamill and Whitaker, 2005; 兰伟仁等, 2010; 聂肃平等, 2010), 变分同化研究中便提出弱约束变分同化 (Zupanski, 1997; Dee and Da Silva, 1998; Vidard et al., 2004)。相对于传统变分同化 (强约束变分同化), 弱约束变分同化中考虑了模式误差的影响, 使得变分同化关键问题增加了随时间演变的模式误差函数及模式误差协方差矩阵的构造。其中, 模式误差演变函数通常假设服从一阶马尔科夫链分布 (Zupanski, 1997) 或高斯噪声分布 (Vannitsem and Toth, 2002; 聂肃平等, 2010) 或用谱变量表示 (Griffith and Nichols, 1998); 而模式误差协方差矩阵, 通常在模式误差假设基础上通过简化近似构建 (Zupanski, 1997) 或者假设其为背景场误差协方差的 α 倍 (Vidard et al., 2004)。然而, 模式误差演变函数基本特征 (采用马尔科夫链分布函数进行模拟显得非常粗糙) 仍有待进一步研究; 并且, 模式误差协方差矩阵理论上是随时间演变的, 虽然背景场误差协方差构建方法可以用来构建模式误差协方差矩阵 (Dee, 1995), 但模式误差相关矩阵的构建需要对模式误差的动力特征进行进一步分析。

关于模式误差对数值预报的影响以及模式误差的估计, 目前大多采用集合预报思想进行研究 (Hamill and Whitaker, 2005; Mutemi et al, 2007; Meng and Zhang, 2007; 聂肃平等, 2010), 其通常是针对某一个例, 讨论采用不同数值模式或不同物理参数化方案对预报效果的影响。对于预报误差的

估计, 往往利用大量数据进行预报偏差统计, 常称为模式输出统计 (MOS) 技术 (Danforth et al., 2007), 对于不同模式, 必须建立相应的 MOS 统计系统。上述研究往往并未得出在模式误差影响下, 对于任意数值模式预报误差演变的一般性结论。Vannitsem and Toth (2002) 和丁瑞强和李建平 (2007) 利用非线性局部 Lyapunov 指数研究了在考虑模式误差情况下, 非线性动力系统模式预报误差随时间的演变。

本文在非线性动力方程 (丁瑞强和李建平, 2007; 李建平和丁瑞强, 2009) 基础上, 从理论上推导出对于任意模式, 在存在模式参数误差和模式物理过程描绘缺失误差情况下的模式预报误差演变方程; 进而计算得到忽略模式变量初始误差条件下, 任意动力系统短时间内模式预报误差平方均值随时间演变的一般规律。之后, 在模式误差非线性发展方程基础上, 通过引入 Liouville 方程, 推导出模式误差概率密度演变方程, 进而讨论模式误差演变特征是否服从马尔科夫链分布。在理论推导基础上, 通过引入 Hopf 分岔动力系统及 Lorenz 热对流和低阶大气系统进行验证和进一步分析讨论。

2 模式误差演变方程推导

对于 n 维非线性动力预报系统 (Nicolis, 2003; 李建平和丁瑞强, 2009),

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mu) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{X}=(x_1, \dots, x_n)$ 为 n 维模式状态变量, μ 为动力系统中所包含的参数, $\mathbf{F}$ 表示非线性动力预报方程组, 其取决于状态变量 $\mathbf{X}$ 和参数 μ 。假设动力预报方程中参数 μ 仅为经验估计值, 且方程组 $\mathbf{F}$ 并没有准确描绘动力系统所有物理过程。此时, 假设动力系统“真实”方程组为:

$$\frac{d\mathbf{X}_T}{dt} = \mathbf{F}_T(\mathbf{X}_T, \mu_T) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_T, \mu_T) + \eta \mathbf{g}(\mathbf{X}_T, \mu_T) \quad (2)$$

其中, μ_T 表示准确参数值, $\mathbf{g}(\mathbf{X}_T, \mu_T)$ 表示预报系统中未准确描绘的物理过程动力表达。假设 η 量纲与 $\delta\mu$ 相同, 即假设物理过程描绘缺失误差为小量 (这与实际模式中包含所有主要物理过程描绘是相吻合的)。此时, 可表示为 $\eta = \gamma\delta\mu$, 其中 $\gamma = O(1)$ 。假设 $\mu = \mu_T + \delta\mu$, 引入预报误差变量 $\mathbf{X}_e$:

$$\mathbf{X}_e = \mathbf{X} - \mathbf{X}_T. \quad (3)$$

利用方程 (1) 和 (2), 预报误差 $\mathbf{X}_e$ 随时间切线性近似演变方程为:

$$\frac{d\mathbf{X}_e}{dt} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{X}_e + \boldsymbol{\phi} \delta \mu, \quad (4)$$

其中, $\mathbf{J} = (\partial F / \partial \mathbf{X})_T$ 为雅克比矩阵, 即切线性项, $\boldsymbol{\phi} = (\partial F / \partial \mu)_T - \gamma_{gT}$ 表示模式误差项对预报误差的影响, 下标 T 表示变量在 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_T$, $\mu = \mu_T$ 时的值。

对于传统数值预报, 即仅考虑初始误差而忽略模式误差 ($\delta \mu = 0$), 对 (4) 式进行积分, 有

$$\mathbf{X}_e(t) = \mathbf{M}(t, 0) \mathbf{X}_e(0), \quad (5)$$

其中, $\mathbf{M}(t, t_0)$ 为与雅克比矩阵 $\mathbf{J}$ 相关的矩阵, 满足:

$$\frac{d\mathbf{M}(t, t_0)}{dt} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{M}(t, t_0), \quad (6)$$

$\mathbf{M}(t, t')$ 满足: $\mathbf{M}(t, t) = \mathbf{I}$ 。

本文着重考虑模式误差对预报误差的影响, 此时忽略初始误差 [$\mathbf{X}_e(0) = 0$] 仅保留模式误差, 对 (4) 式进行积分, 有

$$\mathbf{X}_e(t) = \delta \mu \int_0^t dt' \mathbf{M}(t, t') \boldsymbol{\phi}(t'). \quad (7)$$

(7) 式对时间 t 求导, 有

$$\frac{d\mathbf{X}_e}{dt} = \delta \mu \left(\mathbf{M}(t, t) \boldsymbol{\phi}(t) + \int_0^t dt' \frac{d\mathbf{M}(t, t')}{dt} \boldsymbol{\phi}(t') \right). \quad (8)$$

$t=0$ 初始时刻满足:

$$\left(\frac{d\mathbf{X}_e}{dt} \right)_{t=0} = \delta \mu \boldsymbol{\phi}(t=0). \quad (9)$$

定义 $\langle \boldsymbol{\phi}(t=0) \rangle = \int d\mathbf{X} \boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{X}) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mu)$, 其中, $\boldsymbol{\rho}_s$ 表示系统变量密度分布, $\langle \rangle$ 表示均值。

由 (9) 式可知, 如果 $\langle \boldsymbol{\phi}(t=0) \rangle \neq 0$, 在短时间内, 平均意义上, 模式预报误差 $\mathbf{X}_e(t)$ 随时间线性增长; 否则, 由 (4) 式可知, $t+1$ 时刻的模式预报误差依赖于 t 时刻的模式预报误差, 短时间内模式预报误差随时间呈二次增长。

用模式预报误差 $\mathbf{X}_e$ 乘以 (4) 式, 有

$$\mathbf{X}_e \frac{d\mathbf{X}_e}{dt} = \mathbf{X}_e \mathbf{J} \mathbf{X}_e + \mathbf{X}_e \boldsymbol{\phi} \delta \mu, \quad (10)$$

即

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 |\mathbf{X}_e|^2}{dt^2} = 2 \mathbf{X}_e \mathbf{J} \left| \frac{d\mathbf{X}_e}{dt} \right| + \boldsymbol{\phi} \delta \mu \left| \frac{d\mathbf{X}_e}{dt} \right|, \quad (11)$$

从而, 短时间内模式预报误差平方均值 $\langle |u|^2 \rangle$ 随时间演变满足:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 |\mathbf{X}_e|^2}{dt^2} \Big|_{t=0} = \delta \mu \boldsymbol{\phi}(t=0) \left| \frac{d\mathbf{X}_e}{dt} \right|_{t=0} = (\delta \mu)^2 \boldsymbol{\phi}^2(t=0) \quad (12)$$

由 (12) 式可知, 短时间内, 预报误差平方均值随时间变化取决于 $\int d\mathbf{X}_0 \boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{X}_0) \boldsymbol{\phi}_s^2(\mathbf{X}_0, \mu_0)$, 在其不等于 0 的情况下呈二次增长。同时, 分析 $\boldsymbol{\phi} = (\partial F / \partial \mu)_T - \gamma_{gT}$ 可知, $\boldsymbol{\phi}$ 值大小可能比 $(\partial F / \partial \mu)_T$ 和 γ_{gT} 中任意一项均小。可见, 模式动力系统中参数误差在某些条件下将相互抵消, 使模式预报误差减弱。

3 模式误差概率分布演变

在模式弱约束变分同化中, 往往假设模式误差演变函数服从一阶马尔科夫链分布, 然而, 该假设的有效性还有待进一步研究。下面将讨论模式误差随时间演变的概率分布, 以便为模式误差演变函数构建提供理论指导。由于对完全非线性系统概率分布进行分析是非常困难的, 本文仅对误差演变切线性近似方程 (4) 进行分析。

确定性随机动力系统联合概率密度 $\boldsymbol{\rho}$ 随时间演变服从 Liouville 方程 (Nicolis, 1995, 2003; 李杰和陈建兵, 2010), 结合预报误差演变方程 (4), 得到模式误差概率密度演变方程满足:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}_e, t; \mathbf{X}_{0t})}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_e} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\mathbf{X}_{0t}} \mathbf{X}_e + \delta \mu \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{X}_{0t}} \right] \cdot \boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}_e, t; \mathbf{X}_{0t}) \triangleq \mathbf{L}(\mathbf{X}_e; \mathbf{X}_{0t}) \boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}_e, t; \mathbf{X}_{0t}) \quad (13)$$

其中, $\mathbf{L}$ 表示 Liouville 算子, $\mathbf{X}_{0t}$ 表示动力系统中以 $\mathbf{X}_0$ 为初值积分得到的状态变量。

对任意时刻 t , 引入平均量 $\boldsymbol{\rho}_1(u, t)$, 表示 t 时刻所有可能 $\mathbf{X}_{0t}$ 情况下密度平均值, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1(u, t) &= \int \boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}_0) \boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}_e, t; \mathbf{X}_{0t}) d\mathbf{X}_0 \\ &\triangleq \mathbf{P} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}_e, t; \mathbf{X}_{0t}) \end{aligned} \quad (14)$$

令 $\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}$, 利用 (13) 和 (14) 式, 有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_2 = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}_e, t; \mathbf{X}_{0t}) \\ \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_1}{\partial t} = \mathbf{P} \mathbf{L} \boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{P} \mathbf{L} \boldsymbol{\rho}_2 = \langle \mathbf{L} \rangle \boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{P} \mathbf{L} \boldsymbol{\rho}_2 \\ \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_2}{\partial t} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L} \boldsymbol{\rho}_1 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L} \boldsymbol{\rho}_2 \end{cases} \quad (15)$$

其中, $\langle \mathbf{L} \rangle$ 表示概率密度 $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}_0)$ 下的平均。利用 (15) 第三式, 对于特定 $\boldsymbol{\rho}_1$ 及初值 $\boldsymbol{\rho}_2(0) = 0$, 积分一阶偏微分方程, 有

$$\boldsymbol{\rho}_2(\mathbf{X}_e, t) = e^{\int_0^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L} dt'} \left[\int_0^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L} \boldsymbol{\rho}_1 e^{-\int_0^{t'} (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L} dt''} dt' \right] =$$

$$\int_0^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L} \mathbf{p}_1 e^{\int_0^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L} dt'} dt' \quad (16)$$

代入 (15) 式, 得到模式误差概率密度平均演变方程为:

$$\frac{\partial \mathbf{p}_1(\mathbf{X}_e, t)}{\partial t} = \langle \mathbf{L} \rangle \mathbf{p}_1(\mathbf{X}_e, t) + \mathbf{P} \mathbf{L} \int_0^t \mathbf{K}(t, t') (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L}(\mathbf{X}_e; \mathbf{X}_{0t'}) \mathbf{p}_1(\mathbf{X}_e, t') dt', \quad (17)$$

其中, $\mathbf{K}$ 等于 $\exp(\int_0^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L} dt')$, 其泰勒展开为:

$$\mathbf{K}(t, t') = \mathbf{I} + \int_0^{t'} (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L}(\mathbf{X}_e; \mathbf{X}_{0t_1}) dt_1 + \int_0^{t'} (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L}(\mathbf{X}_e; \mathbf{X}_{0t_1}) dt_1 \cdot \int_0^{t'} (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{L}(\mathbf{X}_e; \mathbf{X}_{0t_2}) dt_2 + \dots \quad (18)$$

由 (17) 式可知, 模式误差概率密度平均 $\mathbf{p}_1$ 在 t 时刻的状态不仅与 $t-1$ 时刻的概率密度状态有关, 还与 0 到 $t-2$ 时刻的概率密度状态有关。可见, 模式误差概率密度随时间演变并不满足一阶马尔科夫链分布特性。模式误差概率密度演变与系统外部强迫等各种误差有关 (包含在 $\mathbf{L}$ 中)。对于不同的动力系统, 模式误差概率密度随时间演变不同, 其由系统本身动力特性所决定。

下面将通过分岔动力系统和 Lorenz 系统对上述理论推导结论进行验证和进一步讨论分析。

4 Hopf 分岔动力系统

Hopf 分岔动力系统为典型的周期性动力系统 (Nicolis, 1995, 2003)。周期振荡在大气系统中常见, 如季节内振荡 (贾燕和管兆勇, 2010)、海雾 (沈忱等, 2010) 等。此时, 模式预报方程为:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \mu r - r^3, \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega, \end{cases} \quad (19)$$

其中, r 和 ϕ 为极坐标系下模式变量, 利用 $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ 可转换到笛卡尔坐标系; μ 为分叉参数; ω 为频率。对于 $\mu < 0$, $r=0$ 为系统 (19) 式的稳定结点; 对于 $\mu > 0$, 出现渐近稳定极限环, 其半径为 $r = \mu^{1/2}$, 旋转角速度为 ω 。 μ 相当于表征混沌系统平均发散率的 Lyapunov 指数 (Nicolis, 1995, 2003)。

假设模式误差仅仅由参数 μ 的不确定性所引起。引入 $u_1 = r - r_0$, 即模式预报误差, (4) 式对应

的模式预报误差演变方程为:

$$\frac{du_1}{dt} = -2\mu_0 u_1 + \mu_0^{1/2} \delta\mu, \quad (20)$$

其中, μ_0 表示 μ 真实值, 假设 $\mu_0 > 0$ 。与 (4) 式相对应, $\mathbf{J} = -2\mu_0$, $\boldsymbol{\phi} = \mu_0^{1/2}$ 。对 (20) 式进行积分, 有

$$u_1(t) = \delta\mu \frac{1}{2\mu_0^{1/2}} (1 - e^{-2\mu_0 t}). \quad (21)$$

短时间内, 即 $t < (2\mu_0)^{-1}$, 对 (21) 式进行泰勒展开并保留至时间 t 的一次项, 预报误差平方均值满足:

$$|u_1(t)|^2 = (\delta\mu)^2 \mu_0 t^2. \quad (22)$$

可见, 对于模式参数误差, 预报误差平方均值随时间呈二次增长, 这与理论结论 (12) 式相吻合。由于极限环是稳定的, 利用 (21) 式计算时间趋于无穷大时 (即长时间), 误差平方 $u_{1\infty}^2$ 为:

$$u_{1\infty}^2 = \frac{(\delta\mu)^2}{4\mu_0}. \quad (23)$$

(23) 式对应模式预报误差平方长时间演变趋近的稳定值, 即预报误差平方饱和值。

考虑模式误差为未知小项 (即对应预报模式中物理过程描绘缺失误差), 假设动力系统模式真实方程为:

$$\frac{dr_T}{dt} = \mu_0 r_T - r_T^3 - \epsilon r_T^5, \quad (24)$$

此时, 模式预报误差演变方程 (4) 化为:

$$\frac{du_2}{dt} = -2\mu_0 u_2 - \mu_0^{5/2} \epsilon. \quad (25)$$

(25) 式与 (20) 式类似, 此时, 预报误差、短时间预报误差平方均值及预报误差平方饱和值分别为:

$$u_2(t) = -\frac{\epsilon \mu_0^{3/2}}{2} (1 - e^{-2\mu_0 t}), \quad (26)$$

$$|u_2(t)|^2 = \epsilon^2 \mu_0^3 t^2, \quad (27)$$

$$u_{2\infty}^2 = \frac{\epsilon^2 \mu_0^3}{4}. \quad (28)$$

可见, 对于模式误差物理过程描绘缺失误差, 预报误差平方均值随时间亦呈二次增长。分析两种不同模式误差条件下的模式预报误差平方表达式可知, 不论是模式参数误差还是未知小项模式物理过程描绘缺失误差, 其对模式预报误差的影响是类似的, 两者在一定条件下具有等价性。

图 1 表示 Hopf 分岔动力系统在存在模式参数误差和模式物理过程描绘缺失误差情况下, 短时间内模式预报误差均值和误差平方均值随时间演变趋

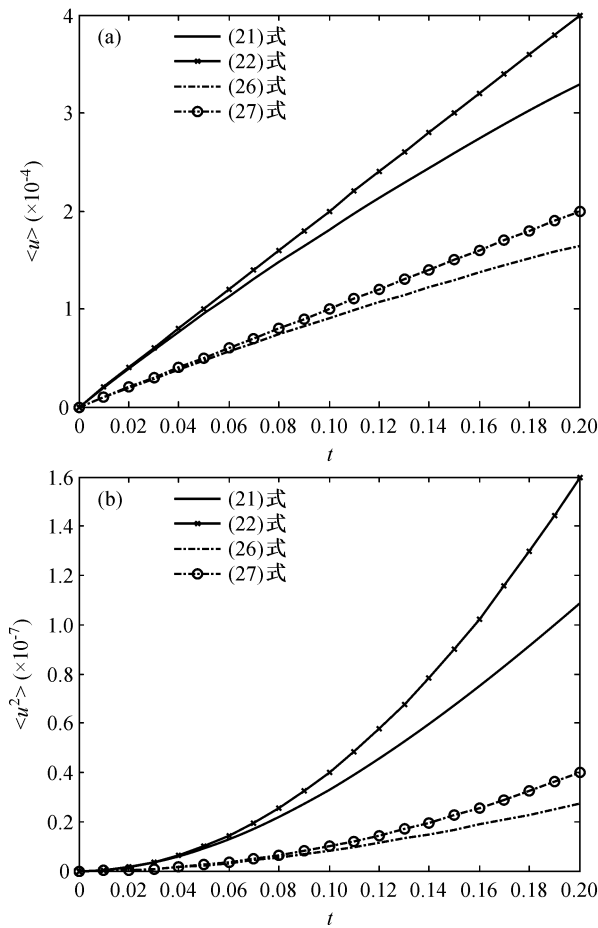


图 1 Hopf 分岔动力系统预报误差均值 (a) 及预报误差平方均值 (b) 短时间内随时间演变 ($\mu_0=1.0$, $\delta\mu=0.002$, $\epsilon=0.001$)
Fig. 1 Short time behavior of the mean error (a) and the mean square error (b) obtained from Hopf bifurcating system with $\mu_0=1.0$, $\delta\mu=0.002$, $\epsilon=0.001$

势。可见，不论是存在参数误差或物理过程描绘缺失误差，预报误差均值随时间基本呈线性增长，而预报误差平方均值随时间呈二次增长 [即 (21) 式平方和 (22) 式、(26) 式平方和 (27) 式曲线相差很小]，这与理论分析结果 (9) 式和 (12) 式相符合。图 2 表示模式误差平方均值长时间随时间演变。可见，随着时间增长，模式误差影响下，预报误差不会无限制增大，最终将趋于稳定饱和值。

同时，选择 $\mu_0=2.0$ 、 $\delta\mu=0.002$ 与 $\mu_0=2.0$ ， $\epsilon=0.0005$ ； $\mu_0=1.0$ 、 $\delta\mu=0.002$ 与 $\mu_0=1.0$ ， $\epsilon=0.001$ 时两种不同模式误差方式产生的模式预报误差随时间变化完全一样，说明模式参数误差和模式物理过程描绘缺失误差在一定条件下等价，这对实际模式中参数误差和物理过程描绘缺失误差讨论具

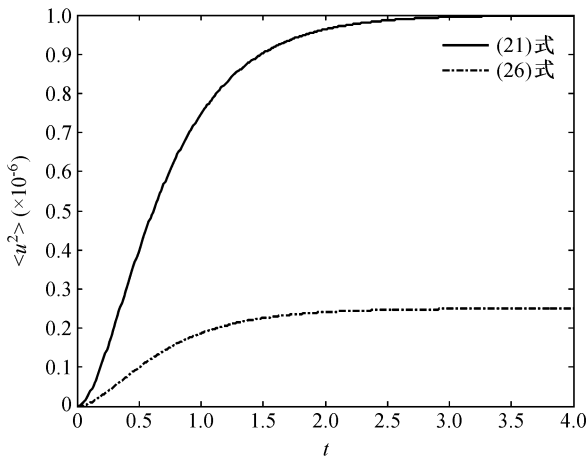


图 2 Hopf 分岔动力系统预报误差平方均值随时间长时间演变
Fig. 2 Long time behavior of the mean square error obtained from Hopf bifurcating system

有一定指导意义。

5 Lorenz 系统

上一节利用简单周期动力系统对模式误差对预报误差的影响进行了讨论，下面将采用相对复杂的 Lorenz 热对流系统和低阶大气系统进行进一步分析讨论，以便为在实际模式中的应用提供更有效依据。混沌 Lorenz 系统常用来研究可预报性 (丁瑞强和李建平, 2007; 李建平 and 丁瑞强, 2009)。

Lorenz 热对流系统方程 (Nicolis, 2003; 李建平 and 丁瑞强, 2009) 为：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(-x + y), \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad (29)$$

此方程为 Lorenz 于 1963 年提出的热对流截断 Boussinesq 近似方程。其中， x 表示垂直对流变化， y 表示水平温度变化， z 表示垂直温度变化。参数 σ 、 b 与对流的内在属性有关， r 为 Rayleigh 数，其反映系统的热对流不稳定性。方程 (29) 中假设 Boussinesq 近似，从而可以假设“真实”方程中包含非 Boussinesq 订正项，如水平温度变化与热传导系数有关，即

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

此时, 预报方程包含参数误差和物理过程描绘缺失误差的预报误差演变方程为:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r_0 - z_0(t) & -1 & -x_0(t) \\ y_0(t) & x_0(t) & -b \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} \delta\sigma(-x_0(t) + y_0(t)) \\ \delta r x_0(t) \\ -\delta b z_0(t) \end{pmatrix} - \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ y_0^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

其中, $r_0=28$, $\sigma_0=10$, $b_0=8/3$ 。

Lorenz 低阶大气系统方程为 (Nicolis, 2003):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax - y^2 - z^2 + aF, \\ \frac{dy}{dt} = -y + xy - bxz + G, \\ \frac{dz}{dt} = bxy + xz - z, \end{cases} \quad (31)$$

该方程中 y 表示热传导过程中的温度变量, 从而可假设模式预报方程中存在热传导系数 b 和热传导强迫 G 误差。此时, 预报误差演变方程为:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{pmatrix} -a & -2y_0(t) & -2z_0(t) \\ y_0(t) - bz_0(t) & x_0(t) - 1 & -bx_0(t) \\ by_0(t) + z_0(t) & bx_0(t) & x_0(t) - 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} a\delta F \\ -\delta b x_0(t) z_0(t) + \delta G \\ \delta b x_0(t) y_0(t) \end{pmatrix}, \quad (32)$$

其中, $x_0(t)$ 、 $y_0(t)$ 和 $z_0(t)$ 分别表示无模式误差系统方程各个时间点的模式变量预报值; $\mathbf{u}$ 表示模式预报误差。

假设 x 、 y 和 z 标准偏差分别为 2.0、2.5 和 1.5 产生 5000 个模式样本初值集合, 所有 $\langle \rangle$ 均值计算均表示对该初值集合平均。图 3 表示不同参数误差下, Lorenz 热对流系统模式预报误差均值和误差平方均值随时间演变趋势。图 4 表示不同参数误差和不同热传导强迫基值 (仅存在参数 G 误差) 下, Lorenz 低阶大气系统短时间内模式预报误差平方均值随时间演变趋势。其中, $\langle u \rangle = \langle u_x + u_y + u_z \rangle$, $\langle u^2 \rangle = \langle u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \rangle$ 。可见, 对于 Lorenz 热对流系统, 存在 δb 误差时, 预报误差随时间基本呈线性增长, 存在其它参数误差条件下预报误差随时间呈二次增长, 预报误差平方均值随时间均呈二次增长; 对于 Lorenz 低阶大气系统, 模式预报误差均值随时间均呈一次增长 (图中没显示), 预报误差平方

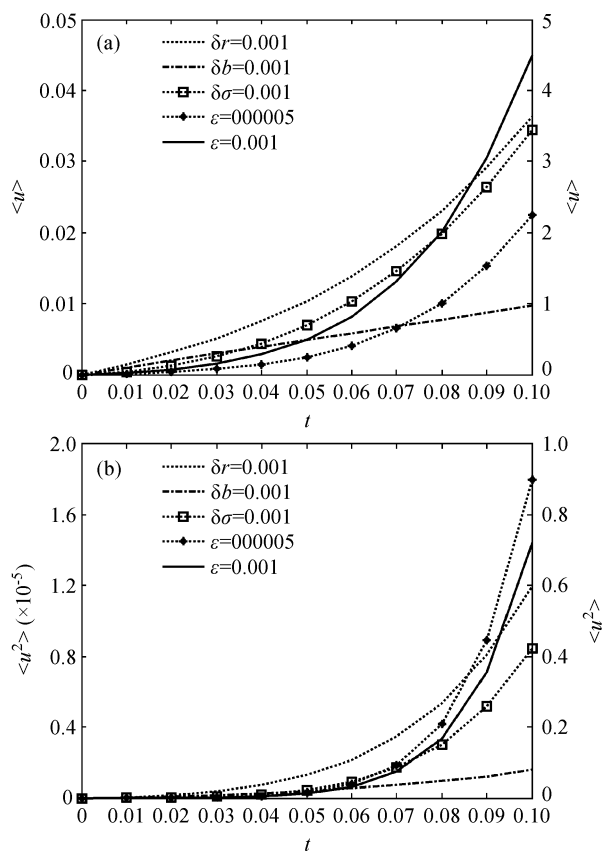


图 3 不同模式误差条件下 Lorenz 热对流系统短时间内模式预报误差均值 (a) 及预报误差平方均值 (b) 随时间演变趋势。误差 δr , δb , $\delta\sigma=0.001$, $\epsilon=0.000005$, $\epsilon=0.001$; 实线对应右侧纵坐标

Fig. 3 Short time behavior of (a) the mean error and (b) the mean square error obtained from Lorenz's thermal convection system with different model errors δr , δb , $\delta\sigma=0.001$, $\epsilon=0.000005$, $\epsilon=0.001$. The full line corresponds to the right y-axis with $\epsilon=0.001$

均值随时间均呈二次增长, 这与理论结论 (9) 式和 (12) 式相符合, 进一步说明理论结论在较复杂动力系统适应性和有效性。考察模式单个变量预报误差平方均值可知, 其随时间演变短时间内也服从上述规律, 即呈二次增长 (并未在图中显示)。同时, 对于 Lorenz 热对流系统, 假设模式参数误差 ($\delta\sigma$, δr , δb) 和物理过程描绘缺失误差 (ϵ) 均为 0.01 时, 预报误差均值量级分别为 10^{-2} 和 10^0 , 相差两个量级; 当设置物理过程描绘缺失误差 $\epsilon=0.000005$, 此时预报误差均值量级相当。可见, 模式在具有相同量级参数误差和物理过程描绘缺失误差条件下, 模式物理过程描绘缺失造成的模式预报误差比参数误差要大, 但是在一定条件下两者具有

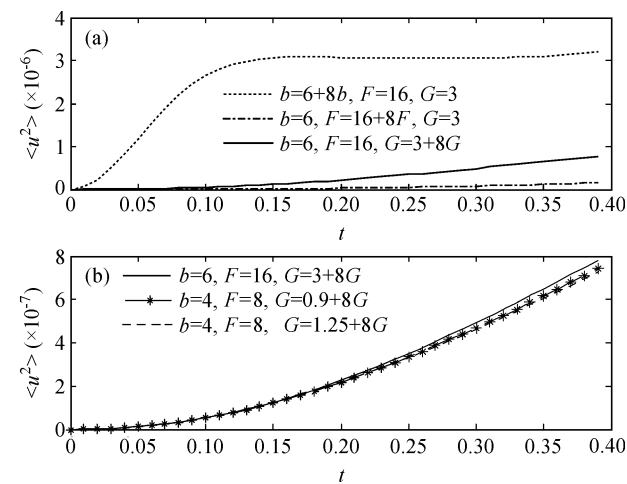


图4 不同参数误差(a)及不同热传导强迫基值(b)情况下 Lorenz 低阶大气系统短时间内模式预报误差平方均值随时间演变趋势:(a) 参数基值 $b=6, F=16, G=3$, 存在三种不同参数误差;(b) 实线参数基值同(a), 虚线为 $b=4, F=8, G=0.9$, 星号线为 $b=4, F=8, G=1.25$, 仅存在参数 G 误差。所有参数误差均为 0.001

Fig. 4 Short time behavior of the mean square error obtained from Lorenz's low-order atmospheric model: (a) For different parameter errors $\delta b=\delta F=\delta G=0.001$ with basic values $b=6, F=16, G=3$; (b) for different basic values with error $\delta G=0.001$

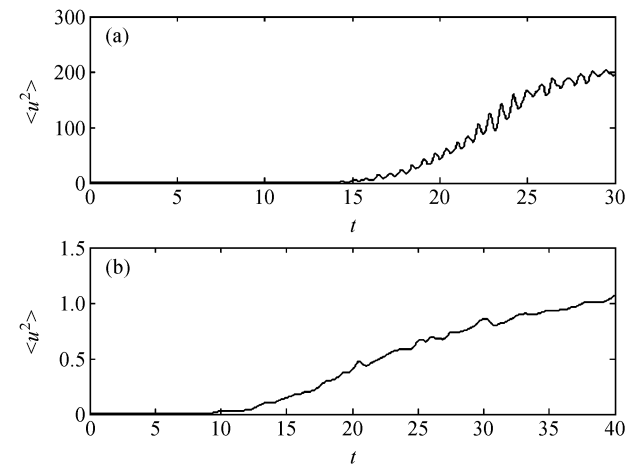


图5 Lorenz 热对流系统(a)和低阶大气系统(b)模式预报误差平方均值随时间长期演变趋势。(a)和(b)参数基值设定分别同图3和图4a

Fig. 5 Long time behavior of the mean square error obtained from (a) Lorenz's thermal convection system and (b) Lorenz's low-order atmospheric model system. The realizations used in (a) and (b) are the same as Fig. 3 and Fig. 4a, separately

等价性,进一步验证简单周期动力系统中结论的有效性。对于 Lorenz 低阶大气系统,不同热传导强迫基值对于预报误差演化影响并不大。可见,短时

间内预报误差变化主要受模式误差决定,而模式中参数基值影响较小。

图5表示 Lorenz 热对流系统和低阶大气系统模式预报误差平方均值的长期演变趋势。可知,随着时间增长,热对流系统和低阶大气系统预报误差平方均值分别趋于 200 和 1.2,这与简单周期系统中结论相符合。两个动力系统误差发展长期稳定值不相同,这可能与模式本身特性有关。相对于长期误差,短时间内误差非常小。

6 总结和讨论

(1) 从非线性动力方程出发,推导出在模式存在参数误差和物理过程描绘缺失误差情况下模式预报误差演变方程。通过合理近似,推导出短时间内任意模式误差均值和误差平方均值演变规律。该方程和预报误差演变规律适应于所有数值动力模式系统。

(2) 利用非线性误差演变方程,结合概率密度演变 Liouville 方程,推导出模式误差概率密度演变一般方程,证明模式误差演变并不服从马尔科夫链分布,为弱约束变分同化中模式误差演变函数的构造提供理论指导和参考价值。

(3) 利用 Hopf 分岔动力系统、Lorenz 热对流和低阶大气系统,进一步验证模式预报误差均值呈线性或二次增长、误差平方均值呈二次增长理论特征;分析预报误差在模式误差影响下的长期演变趋势:均趋于稳定饱和值,该饱和值由模式本身具体特性所决定;分析模式参数误差和物理过程描绘缺失误差下预报误差演变特性,说明两种误差在一定条件下的等价性。

上述理论推导结论及其在简单模式中的应用将为弱约束变分同化研究和模式预报误差订正提供重要理论依据和参考价值。

本文仅讨论了在模式存在参数误差和物理过程描绘缺失误差情况下,模式预报误差随时间的演变趋势,同时,实际大气的多尺度特性决定了模式必然存在多尺度误差,讨论多时间尺度和多空间尺度误差对预报误差的影响将是本文工作的延续。并且,本文仅利用简单周期系统及 Lorenz 系统对上述结论进行了验证和进一步说明,该结论在如 WRF 等复杂模式中的应用还有待进一步研究,关键在于复杂模式切线性模式的计算。

参考文献 (References)

- Danforth C M, Kalnay E, Miyoshi T. 2007. Estimating and correcting global weather model error [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 135: 281–299.
- Dee D P. 1995. On-line estimation of error covariance parameters for atmospheric data assimilation [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 123: 1128–1145.
- Dee D P, Da Silva A M. 1998. Data assimilation in the presence of forecast bias [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 124: 269–295.
- 丁瑞强, 李建平. 2007. 误差非线性的增长理论及可预报性研究 [J]. *大气科学*, 31 (4): 571–576. Ding Ruiqiang, Li Jianping. 2007. Nonlinear error dynamics and predictability study [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 31 (4): 571–576.
- Griffith A K, Nichols N K. 1998. Adjoint methods for treating error in data assimilation [M]//Baines M J. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, VI, 335–344.
- Hamill T M, Whitaker J S. 2005. Accounting for the error due to unresolved scales in ensemble data assimilation: A comparison of different approaches [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 133: 3132–3147.
- 贾燕, 管兆勇. 2010. 江淮流域夏季降水异常与西北太平洋副热带 30~60 天振荡强度年际变化的联系 [J]. *大气科学*, 34 (4): 691–702. Jia Yan, Guan Zhaoyong. 2010. Associations of summer-time rainfall anomalies over the Changjiang–Huaihe River valley with the interannual variability of 30–60-day oscillation intensity in the northwestern Pacific [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 34 (4): 691–701.
- 兰伟仁, 朱江, Xue Ming, 等. 2010. 风暴尺度天气下利用集合卡尔曼滤波模拟多普勒雷达资料同化试验 II. 考虑模式误差的情形 [J]. *大气科学*, 34 (4): 737–753. Lan Weiren, Zhu Jiang, Xue Ming, et al. 2010. Storm-scale ensemble Kalman filter data assimilation experiments using simulated Doppler radar data. Part II: Imperfect model tests [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 34 (4): 737–753.
- 李建平, 丁瑞强. 2009. 混沌系统单变量可预报性研究 [J]. *大气科学*, 33 (3): 551–556. Li Jianping, Ding Ruiqiang. 2009. Studies of predictability of single variable from multi-dimensional chaotic dynamical system [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 33 (3): 551–556.
- 李杰, 陈建兵. 2010. 随机动力系统下的概率密度演化方程及其研究进展 [J]. *力学进展*, 40 (2): 169–188. Li Jie, Chen Jianbing. 2010. Advances in the research on probability density evolution equations of stochastic dynamical systems [J]. *Advances in Mechanics (in Chinese)*, 40 (2): 169–188.
- Meng Z Y, Zhang F Q. 2007. Test of an ensemble Kalman filter for mesoscale and regional-scale data assimilation. Part II: Imperfect model experiments [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 135: 1403–1423.
- Mutemi J N, Ogallo L A, Krishnamurti T N, et al. 2007. Multimodel based superensemble forecasts for short and medium range NWP over various regions of Africa [J]. *Meteor. Atmos. Phys.*, 95: 87–113.
- Nicolis G. 1995. *Introduction to Nonlinear Science* [M]. New York: Cambridge University Press, 5–250.
- Nicolis C. 2003. Dynamics of model error: Some generic features [J]. *J. Atmos. Sci.*, 60: 2208–2218.
- 聂肃平, 朱江, 罗勇. 2010. 不同模式误差方案在集合 Kalman 滤波土壤湿度同化中的比较试验 [J]. *大气科学*, 34 (3): 580–590.
- Nie Suping, Zhu Jiang, Luo Yong. 2010. Comparison experiments of different model error schemes in ensemble Kalman filter soil moisture assimilation [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 34 (3): 580–590.
- 沈忱, 黄健, 刘寿东. 2010. 海雾的准周期振荡特征 [J]. *热带气象学报*, 26 (1): 71–78. Shen Chen, Huang Jian, Liu Shoudong. 2010. Characteristics of quasi-periodic oscillations (QPOS) in sea fog [J]. *Journal of Tropical Meteorology (in Chinese)*, 26 (1): 71–78.
- Vannitsem S, Toth Z. 2002. Short-term dynamics of model errors [J]. *J. Atmos. Sci.*, 59: 2594–2604.
- Vidard P A, Piacentini A, Le Dimet F X. 2004. Variational data analysis with control of the forecast bias [J]. *Tellus*, 56: 177–188.
- Zupanski D. 1997. A general weak constraint applicable to Operational 4DVAR data assimilation systems [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 125: 2274–2292.