

何容,谭亚可,郭琪璇,等.基于类柔度差曲率和频率摄动的结构损伤识别[J].地震工程学报,2020,42(4):825-832.doi:10.3969/j.issn.1000-0844.2020.04.825

HE Rong, TAN Yake, GUO Qixuan, et al. Structural Damage Identification Based on Analogous Flexibility Difference Curvature and Perturbation of Frequency[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2020, 42(4): 825-832. doi: 10.3969/j.issn.1000-0844.2020.04.825

基于类柔度差曲率和频率摄动的结构损伤识别

何 容¹, 谭亚可², 郭琪璇³, 何 伟¹

(1. 华北水利水电大学土木与交通学院, 河南 郑州 450045; 2. 河南星联置地集团有限公司, 河南 郑州 450008;
3. 河南师范大学新联学院, 河南 郑州 452750)

摘要: 为提高梁式结构损伤诊断的效率, 提出一种基于类柔度差曲率和频率摄动的结构损伤识别方法。首先根据结构振动理论, 研究广义柔度矩阵计算公式; 再利用模态柔度对结构损伤灵敏性高的优点, 改进基于柔度差曲率的损伤定位指标, 定义类柔度差曲率 *LCFC* 损伤指标, 并初步识别损伤; 最后基于矩阵摄动进行结构损伤识别结果确认。考虑多种损伤工况, 对一简支梁结构进行损伤识别数值模拟验证。结果表明: 仅使用一阶模态, 建立的类柔度差曲率 *LCFC* 指标对梁式结构损伤定位具有良好的诊断效果, 且计算工作量小; 对于含边界损伤单元的多损伤工况, 当损伤程度大于 10% 时, *LCFC* 指标识别有效; 当损伤程度不大于 25% 时, 各工况二阶摄动识别结果精度较高, 相对误差较一阶摄动结果明显降低, 证明了该方法的实用性、有效性和精确性。

关键词: 损伤识别; 类柔度差曲率; 频率; 摄动

中图分类号: U443.35

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2020)04-0825-08

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2020.04.825

Structural Damage Identification Based on Analogous Flexibility Difference Curvature and Perturbation of Frequency

HE Rong¹, TAN Yake², GUO Qixuan³, HE Wei¹

(1. School of Civil Engineering and Communication, North China University of

Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450045, Henan, China;

2. Henan Sinolink Real Estate Group Co., LTD, Zhengzhou 450008, Henan, China;

3. Xinlian College, Henan Normal University, Zhengzhou 452750, Henan, China)

Abstract: To improve the efficiency of damage diagnosis of beam structures, a structural damage identification method, based on the analogous flexibility difference curvature and frequency perturbation was established. First, according to the theory of structural vibration, the calculation formula of generalized flexibility matrix was studied. Utilizing the high sensitivity of modal flexibility to structural damage, the damage location index, based on flexibility difference curvature, was improved, and the damage index of *LCFC* (the difference of likeness curvature of flexibility coefficient) was defined and used to preliminarily identify damage. Identification result of struc-

收稿日期: 2018-09-21

基金项目: 河南省高等学校重点科研项目计划项目(19A560014)

第一作者简介: 何 容(1973-), 女, 四川南充人, 硕士, 副教授, 主要从事工程结构抗震研究。E-mail: hwhr123@163.com。

tural damage was confirmed based on matrix perturbation. Considering various damage conditions, damage identification of the simply supported beam structure was verified by numerical simulation. Results showed that the *LCFC* index has a good diagnostic effect on the damage location of beam structures using only the first mode. Calculation workload of the index was small. For multi-damage cases with boundary damage elements, the *LCFC* index was effective when the damage degree was $>10\%$. When the damage degree was $<25\%$, accuracy of the second-order perturbation identification results was high and the relative error was significantly lower than that of the first-order perturbation identification results, which proved the practicability, effectiveness, and accuracy of the method.

Keywords: damage identification; analogous flexibility difference curvature; frequency; perturbation

0 引言

利用结构物理参数和模态参数的函数关系^[1],通过测得模态参数的变化,可反演出结构损伤状况。近年来,基于结构动力特性参数及其衍生量的结构损伤识别技术引起了广泛关注^[2]。陈淮等^[3]、杜思义等^[4]研究了结构物理参数和单元损伤参数的函数关系,提出了基于频率和振型摄动的结构损伤识别方法,研究结果显示测量误差和噪声对频率摄动计算结果影响较小。张晋等^[5]通过对曲率模态差指标的改进,提出了叠加曲率模态改变率指标,并通过数值算例验证了新指标的有效性和优越性。宗周红等^[6]提出了基于响应面模型修正和单元模态应变能损伤指标的结构损伤识别方法,并通过简支梁室内模型试验和实桥损伤识别验证了该方法的可行性与有效性。Lee 等^[7]推导了基于扩展自由度的修正柔度矩阵的分析方法,并用修正后的柔度曲率检测结构损伤。战家旺等^[8]以桥梁在车辆荷载作用下的动力响应频谱定义频谱形状差异性指数,并结合频率构造目标函数,提出了一种基于桥梁在线动力响应的铰接缝损伤定量评估方法。柔度是较频率和位移模态更敏感的结构损伤识别标示量^[9],其构造方式体现了振型与频率的综合特性,仅利用低阶模态数据就能获得较高精度的柔度矩阵值。李万恒等^[10]、张家滨等^[11]和周宇等^[12]利用频率和振型计算柔度矩阵,研究了由柔度矩阵衍生的损伤识别指标,结果表明柔度类指标对低阶模态敏感,可有效用于简支梁的损伤评估且其噪声鲁棒性好。安永辉等^[13]提出了基于比例柔度矩阵 LU 分解的结构损伤定位方法;曹晖等^[14]和张军等^[15]分别运用建立的模态柔度曲率差指标和模态差曲率指标来进行结构损伤诊断。Li 等^[16]提出了广义柔度矩阵,利用其灵敏度和变化量检测结构的损伤位置和损伤程度,降低了高阶模态截断的影响。Scianna 等^[17]提出无模型模态

柔度健康监测算法,并通过对在役桥梁环境荷载数据的收集和研究验证了其算法的有效性。Ashory 等^[18]和 Giacomod 等^[19]分别提出了一种利用广义柔度矩阵结合连续小波变换检测结构损伤位置的新方法和一种基于模态柔度的结构损伤检测和定位方法,并通过数值模拟和试验研究验证了所提方法的有效性。

实际工程中,模态测试仅能准确获得前几阶模态参数^[20]。为减少模型和模态测量误差的影响,同时避免损伤单元位于振型节点时损伤识别指标失效的缺陷,本文提出一种基于类柔度差曲率和频率摄动的结构损伤识别方法:首先利用一阶模态测试数据建立类柔度矩阵,再利用损伤前后类柔度矩阵差计算类柔度曲率,通过类柔度差曲率指标初步识别损伤,最后通过频率摄动确认损伤。该方法可以充分利用类柔度差曲率对损伤敏感的特点和低阶频率测量精度高的优点,并降低损伤识别对高阶模态的依赖性。同时以一简支梁为例验证了该方法的可行性。

1 损伤定位指标的建立

1.1 结构模态柔度矩阵

对于多自由度无阻尼自由振动系统,其特征方程为:

$$K\varphi - \lambda M\varphi = 0 \quad (1)$$

式中: K 为结构刚度矩阵; M 为结构质量矩阵; λ 为特征值; φ 为质量归一化后的特征向量。

由模态分析理论可知,结构的柔度矩阵 F 可用模态参数表示为:

$$F = \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega_i^2} \varphi_i \varphi_i^T \quad (2)$$

式中: Φ 为结构正则化振型; $\Lambda = \text{diag}\{\omega_i^2\}$ 为结构特征值对角阵,其中 ω_i 为结构第 i 阶固有频率; φ_i 为结构第 i 阶振型位移; m 为模态总阶数。

由式(2)可以看出,柔度矩阵随频率增加迅速收敛,因此只需少数低阶模态就可得到柔度矩阵的较好估计。

1.2 结构模态类柔度矩阵

在结构模态满足关于质量矩阵归一化的条件下,即 $\Phi^T M \Phi = I$, 根据文献[16] 提出的广义柔度矩阵

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}(\mathbf{M}\mathbf{F})^l, l=0,1,2\cdots \quad (3)$$

把式(2)代入式(3),令 $l=1$,得结构模态类柔度矩阵 $\mathbf{F}^*$ 为:

$$\mathbf{F}^* = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega^4} \varphi_i \varphi_i^T \quad (4)$$

由式(4)可以看出,相比式(2)中的 $\mathbf{F}$,高阶模态对 $\mathbf{F}^*$ 的影响衰减更快,此时利用低阶模态估计 $\mathbf{F}^*$ 的精度得到大大提高。同时,频率在 $\mathbf{F}^*$ 中相对比例逐渐增大,从而提高了频率的利用率,间接降低了噪声的影响。

1.3 结构模态柔度曲率差

文献[14] 提出的模态柔度曲率差指标,是在求模态柔度差之前先求损伤前后模态柔度的曲率矩阵 $\mathbf{C}\mathbf{F}^u$ 和 $\mathbf{C}\mathbf{F}^d$,其元素计算如下:

$$\mathbf{C}\mathbf{F}^u = \frac{f_j^u(i-1) + f_j^u(i+1) - 2f_j^u(i)}{2l_i^2} \quad (5)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{F}^d = \frac{f_j^d(i-1) + f_j^d(i+1) - 2f_j^d(i)}{2l_i^2} \quad (6)$$

式中: $f_j^u(i)$ 与 $f_j^d(i)$ 分别表示损伤前后结构柔度矩阵第 j 列第 i 行的元素; l_i 为 i 单元的长度,当各单元长度相等时可以略去。

最后求模态柔度曲率矩阵的差值,并将其各列的最大值作为诊断指标 MFC :

$$MFC = \max |\mathbf{C}\mathbf{F}^d - \mathbf{C}\mathbf{F}^u| \quad (7)$$

1.4 结构模态类柔度差曲率

获得了结构损伤前后的类柔度矩阵 $\mathbf{F}^{*u}$ 和 $\mathbf{F}^{*d}$,类柔度差矩阵可以表示为:

$$\Delta \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{*u} - \mathbf{F}^{*d} \quad (8)$$

基于 Pandey 和 Biswas 的模态柔度差指标 $MF^{[14]}$,定义类柔度差矩阵 $\Delta \mathbf{F}^*$ 每一列中绝对值最大元素为 δ_j^* ,即:

$$\delta_j^* = \max_i |\delta_{ij}^*| \quad (9)$$

定义结构模态类柔度差曲率指标:在求得模态类柔度差矩阵 $\Delta \mathbf{F}^*$ 之后,将其每一列中绝对值最大元素 δ_j^* 所组成数列的曲率绝对值作为损伤指标,可用 $LCFC$ 来表示,即:

$$LCFC = \left| \frac{\delta_{j-1}^* - 2\delta_j^* + \delta_{j+1}^*}{2l_j^2} \right| \quad (10)$$

式中: δ_j^* 为类柔度差矩阵 $\Delta \mathbf{F}^*$ 第 j 列中绝对值最大的元素; l_j 为 j 单元的长度。

从式(9) ~ (10) 可以看出,本文提出的方法比文献[14] 的计算工作量小得多,相比文献[15] 提高了利用低阶模态估计 $\mathbf{F}^*$ 的精度,增强了损伤识别指标对损伤的敏感性。

2 损伤程度的确定

2.1 频率摄动公式

由摄动理论可得结构损伤后的总体刚度矩阵为:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^m \epsilon_i \mathbf{K}_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \epsilon_i \epsilon_j \mathbf{K}_{ij} + o(\epsilon^3), \quad i=1,2,\cdots,m, m \leq n \quad (11)$$

式中: $\mathbf{K}_0$ 是结构损伤前的刚度矩阵; ϵ_i 大小表示损伤程度,有效区间为 $(-1,0]$, i 表示损伤单元位置; $\mathbf{K}_i$ 是 $\mathbf{K}_0$ 关于参数 ϵ_i 的一阶变化率, $\mathbf{K}_{ij}$ 是 $\mathbf{K}_0$ 关于参数 ϵ_i, ϵ_j 的二阶变化率; $\sum$ 表示按有限单元法组集; n 为结构离散化模型的单元总数。

将系统损伤后的振动特征值和特征向量按小参数 ϵ 展开为幂级数,即

$$\lambda^s = \lambda_0^s + \sum_{i=1}^m \epsilon_i \lambda_i^s + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \epsilon_i \epsilon_j \lambda_{ij}^s + o(\epsilon^3) \quad (12)$$

$$u^s = u_0^s + \sum_{i=1}^m \epsilon_i u_i^s + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \epsilon_i \epsilon_j u_{ij}^s + o(\epsilon^3) \quad (13)$$

式中: s 表示系统特征值和特征向量的阶数; $\lambda_i^s, u_i^s, \lambda_{ij}^s, u_{ij}^s$ 分别为特征值和特征向量的一阶变化率和二阶变化率,且 $\lambda_i^s = \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j}, u_{ij}^s = \frac{1}{1 + \delta_{ij}}$

$$\frac{\partial^2 u^s}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j}, \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

将式(11) ~ (13) 代入式(1),由等式两边 ϵ 同次幂相等的原则,可得

$$(\mathbf{K}_0 - \lambda_0^s \mathbf{M}) u_0^s = 0 \quad (14)$$

$$(\mathbf{K}_j - \lambda_j^s \mathbf{M}) u_0^s + (\mathbf{K}_0 - \lambda_0^s \mathbf{M}) u_j^s = 0 \quad (15)$$

$$(\mathbf{K}_j + \lambda_j^s \mathbf{M}) u_j^s + (\mathbf{K}_0 + \lambda_0^s \mathbf{M}) u_{ij}^s - \lambda_{ij}^s \mathbf{M} u_0^s = 0 \quad (16)$$

2.2 损伤程度

为求解参数 ϵ ,舍去 3 阶小量,将式(12) 写成矩阵形式,即有

$$\boldsymbol{\lambda}^s = \boldsymbol{\lambda}_0^s + \epsilon \boldsymbol{\lambda}_i^s + \epsilon^T \boldsymbol{\lambda}_{ij}^s \epsilon \quad (17)$$

采用修正后的精细有限元模型计算的低阶固

有频率与结构实测固有频率基本一致,可以认为结构损伤前的实测特征值 λ_0^* 等于 λ_0 ,即得结构损伤前后固有频率的变化量为

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \epsilon\lambda_j + \epsilon^T\lambda_{ij}\epsilon \tag{18}$$

由式(18)可以解出损伤识别参数 ϵ 。当结构损伤很小时,式(18)的二阶项较小,则可得线性损伤识别方程组

$$\lambda - \lambda_0 = \epsilon\lambda_j \tag{19}$$

这样一来计算过程可以大大简化;当结构参数 ϵ 变化较大时,为保证计算精度,可以采用二阶摄动。

3 数值算例

3.1 简支梁模型

选取一等截面简支梁桥模型,其跨长 6 m,截面面积为 0.1 m²,截面惯性矩为 2.083×10⁻³ m⁴,材料弹性模量为 32.5 GPa,泊松比为 0.24,密度为 2 500 kg/m³。简支梁数值模拟时损伤工况设置列于表 1。

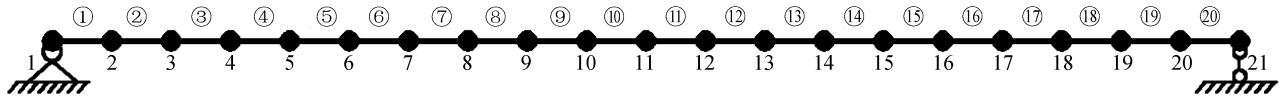


图 1 简支梁模型单元与节点号

Fig.1 Simply supported beam model element and node number

模拟损伤导致的刚度降低,采用集中质量法,用有限元程序选用梁单元分别计算在无损伤和有不同种类损伤情况下的前两阶模态,并利用竖向弯曲振动自由度的损伤指标值判别结构损伤位置。

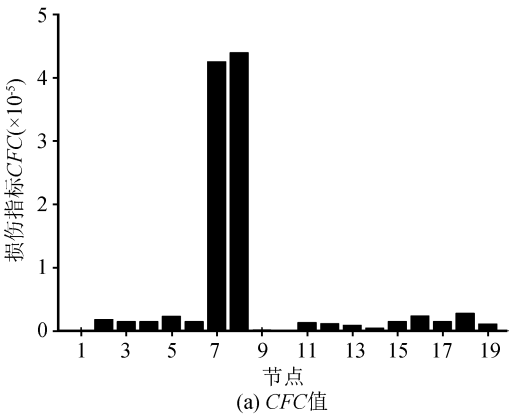


表 1 损伤工况					
Table 1 Damage conditions					
工况	单元号			损伤程度/%	
1	7			5	
2	7			10	
3	7			15	
4	7			20	
5	7			25	
6	7	11	25	5	
7	7	11	25	10	
8	7	11	25	15	
9	7	11	16	15	5
10	7	11	20	25	5
11	7	11	20	25	10
12	7	11	20	25	15
13	7	11	20	25	20

将该结构模型划分为等长的 20 段,如图 1 所示(图中上排圆圈内的数字为单元编号,下排数字为节点编号)。假定结构损伤仅仅表现为单元刚度的减少,其质量将保持恒定。这里用弹性模量的减少来

3.2 单损伤定位

针对单损伤情况,以工况 1 为例,利用文献[15]方法和本文提出的类柔度差曲率法进行损伤诊断,结果分别如图 2(a)和图 2(b)所示。

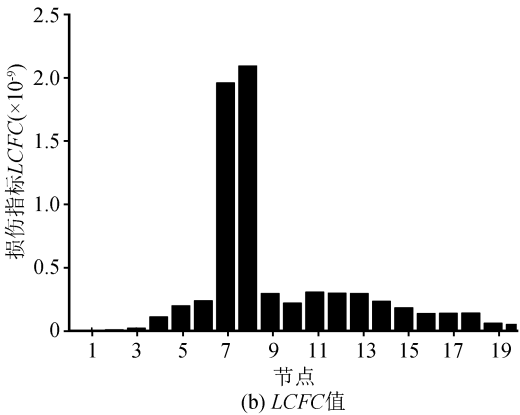


图 2 工况 1 的两种指标损伤诊断结果

Fig.2 Damage diagnosis results of two different indexes in case 1

通过图 2 对比可以看出,在 5%的微损伤时,两种方法损伤位置的指标值相对于未损伤部分更加突出,表明仅使用竖向一阶模态振型建立类柔度差曲率法损伤指标 LCFC 同样能很好地进行诊断。

其他损伤工况将以类柔度差曲率 LCFC 为损伤指标进行损伤诊断。

由图 3(a)~(d)可知,LCFC 指标在不同程度的单损伤下对梁式结构的损伤位置有明显的指向

性,且 $LCFC$ 指标值与损伤程度呈正比关系。 $LCFC$ 指标的整个基线变化符合一阶振型模态,损伤单元与非损伤单元的差值非常明显,证明了该指标进行损伤位置识别的有效性。

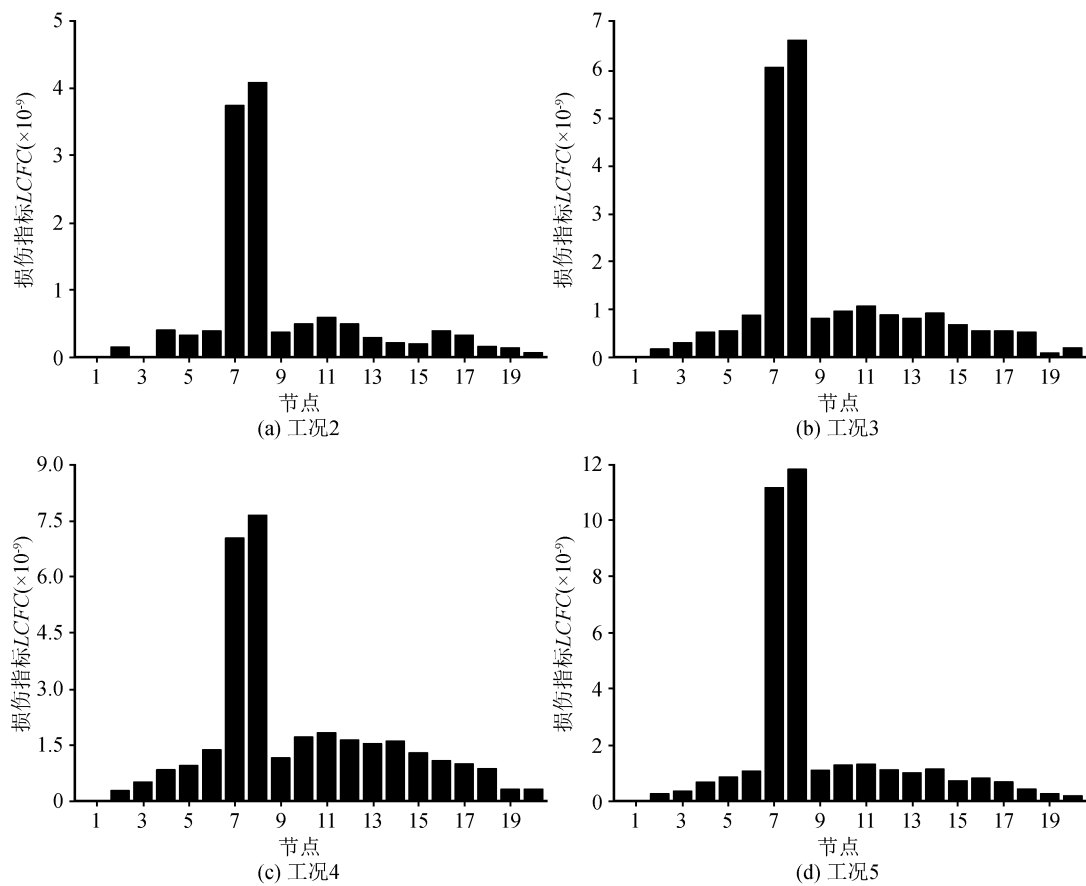


图 3 单损伤不同损伤程度下 $LCFC$ 指标位置识别结果

Fig.3 Location result of $LCFC$ index under single damage with different degree

3.3 多损伤定位

3.3.1 不含边界单元损伤的多损伤

由图 4(a)~(d)可知, $LCFC$ 指标在不含边界单元的多损伤下对梁式结构的损伤位置同样有明显的指向性,不同损伤单元的 $LCFC$ 指标值与损伤程度呈正比关系。尽管由于改进的损伤识别指标在未损伤单元处有“伪损伤”干扰,但由单损伤工况识别结果可知结构未损伤单元 $LCFC$ 指标基线变化符合一阶振型模态,其随单元变化的曲线形状基本相同,损伤单元与非损伤单元的差值非常明显,比较容易进行判断。这一优势也是旧指标所不具备的。结合图 3 和图 4 可知,对于单损伤和多损伤,仅通过一阶模态测试数据构建的 $LCFC$ 指标可进行结构损伤位置诊断。

3.3.2 含边界单元损伤的多损伤

由图 5(a)~(d)可知, $LCFC$ 指标在含边界损伤单元的多损伤下对梁式结构损伤位置的指向性在边界单元弱损伤时不明显,但是 $LCFC$ 指标值与损

伤程度同样呈正比关系。根据 $LCFC$ 指标识别损伤位置时单元基线变化形状符合一阶振型模态这一规律可知,在含边界损伤单元的多损伤下梁式结构的边界单元损伤为 15%时, $LCFC$ 指标能对损伤位置进行有效识别。

3.4 各工况损伤程度识别

$LCFC$ 指标主要用来识别损伤位置,需通过频率摄动确定损伤程度。由文献[3]可知测量误差和噪声对频率摄动计算结果影响较小,因此利用矩阵摄动理论中一、二阶频率摄动公式分别对各工况进行损伤程度识别(二阶频率摄动计算过程同一阶频率摄动)。模态参数从简支梁有限元模型中通过模态分析得到,损伤识别相关方程的构建及求解根据 1.2~1.4 节和 2.1~2.2 节相关理论,通过 Matlab 实现上述算法。频率摄动结果列于表 2 和表 3,表中误差值的计算均以表 1 中各工况损伤程度设置的精确值为基础。

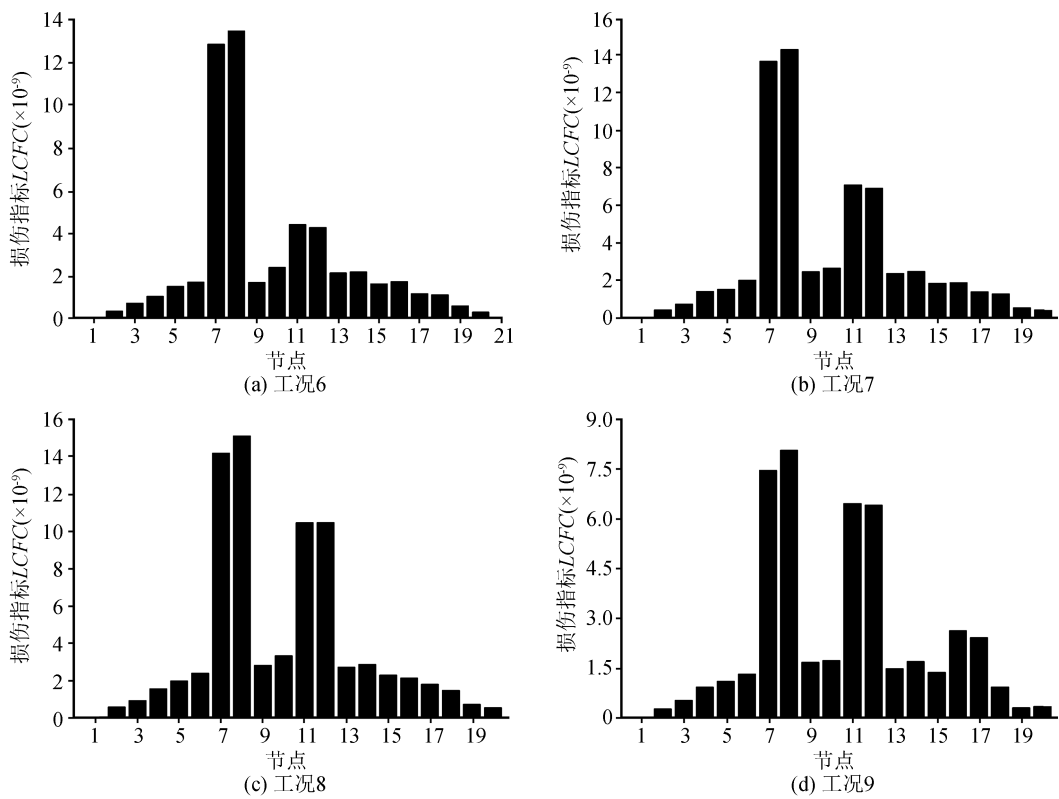


图 4 不含边界单元的多损伤下 $LCFC$ 指标位置识别结果

Fig.4 Location results of $LCFC$ index without boundary element under multiple damage

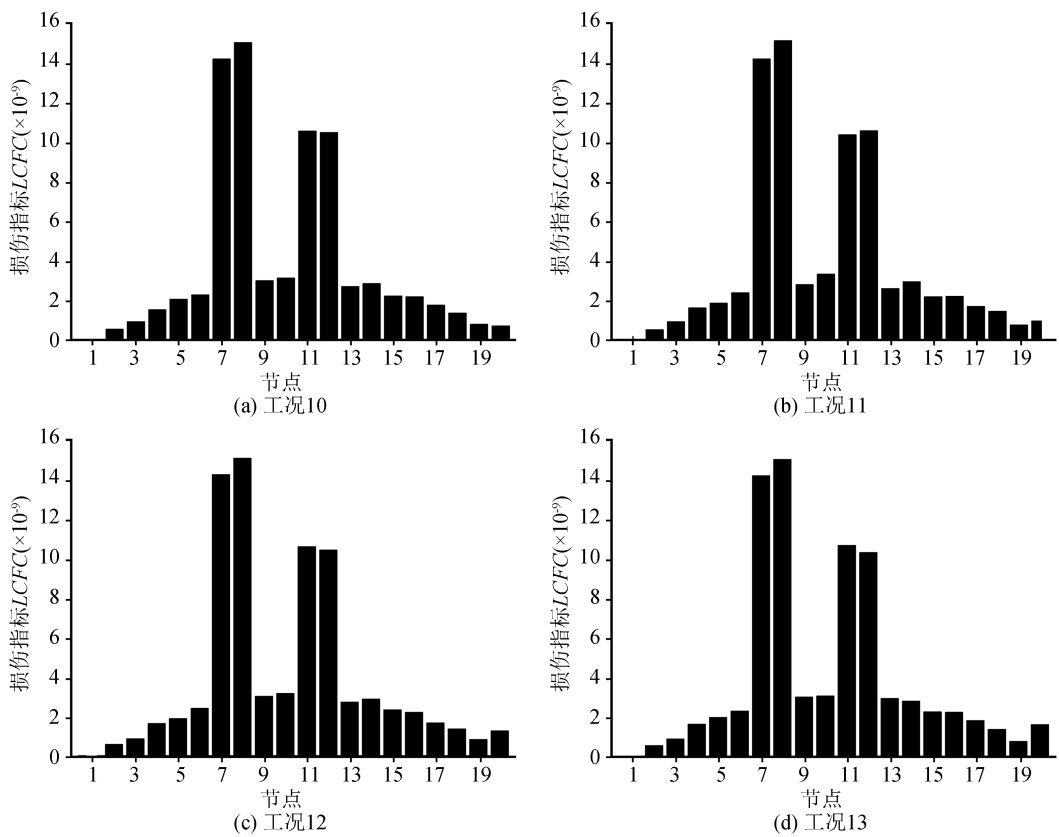


图 5 含边界单元的多损伤下 $LCFC$ 指标位置识别结果

Fig.5 Location result of $LCFC$ index with boundary element under multiple damage

表 2 损伤工况损伤程度一阶频率摄动识别结果

Table 2 Results of first-order frequency perturbed identification of damage degree under different cases

工况	频率一阶摄动解/%			误差/%		
1	5.11			2.20		
2	10.84			8.40		
3	17.01			13.40		
4	23.96			19.81		
5	31.53			26.12		
6	31.61	5.21		26.44	4.22	
7	32.13	11.17		28.52	11.70	
8	32.26	17.56		29.04	17.07	
9	17.71	11.01	5.30	18.07	10.10	6.00
10	31.30	17.27	5.31	25.20	15.13	6.20
11	31.59	17.34	9.98	26.36	15.60	11.20
12	31.48	17.22	17.50	25.92	14.80	16.67
13	31.60	17.36	24.20	26.40	15.73	21.00

表 3 损伤工况损伤程度识别结果

Table 3 Identification results of damage degree under different cases

工况	频率二阶摄动解/%			误差/%		
1	5.01			0.20		
2	10.03			0.30		
3	15.08			0.53		
4	20.15			0.75		
5	25.27			1.08		
6	25.28	5.03		1.12	0.60	
7	25.63	10.21		2.52	2.10	
8	25.81	15.47		3.24	3.13	
9	15.50	12.04	5.02	3.33	2.04	0.40
10	25.83	15.46	5.04	3.32	3.07	0.80
11	25.96	15.48	10.22	3.84	3.19	2.21
12	26.24	15.64	15.67	4.96	4.27	4.47
13	26.31	15.74	21.17	5.24	4.93	5.85

表 2 中频率摄动识别结果表明:(1)梁式结构损伤时,一阶摄动结果的相对误差与损伤程度呈正相关性;(2)当单损伤程度不超过 25%时,一阶摄动结果的最大相对误差为 26.12%;(2)多损伤时,一阶摄动结果的最大相对误差出现在工况 8,其相对误差为 29.04%。

比较表 2 和表 3 中频率摄动识别结果可知,梁式结构的损伤程度不超过 25%时,二阶摄动识别结果精度明显较一阶摄动识别结果高,识别结果的相对误差与损伤程度同样呈正相关性;当较大损伤存在时,舍弃的二阶项会引起较大误差,为保证识别精度,二阶项的影响应该被考虑。具体表现为:单损伤的二阶摄动结果,其相对误差不超过 1.08%,结果比较精确;不含边界单元的多损伤时,二阶摄动识别结果相对误差不超过 3.33%,依旧有较好的精度,满足工程需要;含边界损伤单元的多损伤时,二阶摄动识

别结果的相对误差达 5.85%,其相对误差较不含边界损伤单元时增大。相比其他损伤识别方法,本文在损伤诊断过程中仅需使用第一阶模态测量值来构建损伤识别指标,从而降低了模态参数测量的工作量。

4 结论

- (1) 改进的损伤识别指标 *LCFC* 降低了计算工作量,数值模拟结果显示了 *LCFC* 指标的良好效果。
- (2) 提出的基于类柔度差曲率和频率摄动的损伤识别方法,仅需第一阶模态测试数据就可以完成结构损伤位置的诊断和定量识别其损伤程度。
- (3) 该方法体现了振型与频率的综合特性,利用了目前试验条件下固有频率易测试、测试精度高的优点。

参考文献(References)

[1] 何伟,陈淮,王博,等.运用改进残余力向量法的结构损伤识别研究[J].振动.测试与诊断,2009,29(4):379-382.
HE Wei, CHEN Huai, WANG Bo, et al. Structural Damage Identification by Using Improved Residual Force Vector[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2009, 29(4): 379-382.

[2] MARKIEWICZ É, LANGRAND B, NOTTA-CUVIER D. A Review of Characterisation and Parameters Identification of Materials Constitutive and Damage Models: From Normalised Direct Approach to Most Advanced Inverse Problem Resolution[J]. International Journal of Impact Engineering, 2017, 110: 371-381.

[3] 陈淮,何伟,王博,等.基于频率和振型摄动的结构损伤识别方法研究[J].工程力学,2010,27(12):244-249.
CHEN Huai, HE Wei, WANG Bo, et al. Study on Structure Damage Detection Based on Perturbations of Frequency and Mode Shapes[J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(12): 244-249.

[4] 杜思义,殷学纲,陈淮.基于频率二阶摄动的结构损伤识别方法[J].应用力学学报,2006,23(4):613-617,699.
DU Siyi, YIN Xuegang, CHEN Huai. Damage Detection Method Based on 2nd Order Frequency Perturbation[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2006, 23(4): 613-617, 699.

[5] 张晋,彭华,游春华.基于叠加曲率模态改变率的梁结构损伤诊断[J].工程力学,2012,29(11):272-276,301.
ZHANG Jin, PENG Hua, YOUChunhua. Damage Diagnosis of Beam Structures Based on Superimposed Curvature Modal Change Rate[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(11): 272-276, 301.

[6] 宗周红,褚福鹏,牛杰.基于响应面模型修正的桥梁结构损伤识别方法[J].土木工程学报,2013,46(2):115-122.

- ZONG Zhouhong, CHU Fupeng, NIU Jie. Damage Identification Methods of Bridge Structures Using Response Surface Based on Finite Element Model Updating[J]. China Civil Engineering Journal, 2013, 46(2): 115-122.
- [7] LEE E T, EUN H C. Damage Detection Approach Based on the Second Derivative of Flexibility Estimated from Incomplete Mode Shape Data[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 44: 602-613.
- [8] 战家旺, 高胜星, 张飞, 等. 基于在线动力响应的板梁桥铰接缝损伤评估方法[J]. 中国公路学报, 2018, 31(7): 156-166.
- ZHAN Jiawang, GAO Shengxing, ZHANG Fei, et al. Damage Evaluation Method for Hinged Joints in Slab-girder Bridges Using Online Dynamic Responses[J]. China Journal of Highway and Transport, 2018, 31(7): 156-166.
- [9] 李永梅, 周锡元, 高向宇. 基于柔度差曲率矩阵的结构损伤识别方法[J]. 工程力学, 2009, 26(2): 188-195, 202.
- LI Yongmei, ZHOU Xiyuan, GAO Xiangyu. Detection Indicator of Structural Nondestructive Damage Based on Curvature-flexibility-difference Matrix[J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(2): 188-195, 202.
- [10] 李万恒, 申林, 王少鹏, 等. 基于多阶段分区域动力测试的桥梁结构损伤评估[J]. 吉林大学学报(工学版), 2019, 49(3): 773-780.
- LI Wanheng, SHEN Lin, WANG Shaopeng, et al. Damage Assessment of Bridge Construction Based on Multi-stage Subregion Mobile Test[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2019, 49(3): 773-780.
- [11] 张家滨, 唐催, 王磊, 等. 基于频率变化率的结构刚度非均匀退化识别[J]. 振动. 测试与诊断, 2018, 38(3): 486-493.
- ZHANG Jiabin, TANG Cui, WANG Lei, et al. Identification of Non-uniform Stiffness Degradation in Structure Based on the Change Rate of Frequency[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2018, 38(3): 486-493.
- [12] 周宇, 狄生奎, 项长生, 等. 基于柔度曲率梯度的刚架拱桥损伤识别[J]. 应用基础与工程科学学报, 2017, 25(6): 1211-1221.
- ZHOU Yu, DI Shengkui, XIANG Changsheng, et al. Damage Detection of Rigid-Frame Arch Bridge Based on Flexibility Curvature Gradient[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2017, 25(6): 1211-1221.
- [13] 安永辉, 欧进萍. 框架结构损伤定位的比例柔度矩阵分解法试验研究[J]. 振动工程学报, 2014, 27(6): 819-826.
- AN Yonghui, OU Jinping. Experimental Validation of a Proportional Flexibility Matrix Decomposition-based Damage Localization Method for Frame Structures[J]. Journal of Vibration Engineering, 2014, 27(6): 819-826.
- [14] 曹晖, Michael I F. 基于模态柔度曲率的损伤检测方法[J]. 工程力学, 2006, 23(4): 33-38.
- CAO Hui, Michael I F. Nondestructive Damage Evaluation Indicator Based on Modal Flexibility Curvature[J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(4): 33-38.
- [15] 张军, 刘建勋, 徐进, 等. 结构损伤诊断的模态柔度差曲率法[J]. 工程力学, 2011, 28(12): 112-118.
- ZHANG Jun, LIU Jianxun, XU Jin, et al. Structural Damage Detection Based on Change in Curvature of Flexibility[J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(12): 112-118.
- [16] LI J, WU B S, ZENG Q C, et al. A Generalized Flexibility Matrix Based Approach for Structural Damage Detection[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(22): 4583-4587.
- [17] SCIANNA A, JANG S. Model-Free Modal Flexibility-Based Damage Detection Strategy for In-Service Highway Bridges [C]//Proceedings of SPIE - the International Society for Optical Engineering, 2011, 7981: 79814U-79814U-9.
- [18] ASHORY M R, MASOUMI M, JAMSHIDI E, et al. Using Continuous Wavelet Transform of Generalized Flexibility Matrix in Damage Identification [J]. Journal of Vibroengineering, 2013, 15(2): 512-519.
- [19] BERNAGOZZI G, MUKHOPADHYAY S, BETTI R, et al. Output-only Damage Detection in Buildings Using Proportional Modal Flexibility-based Deflections in Unknown Mass Scenarios[J]. Engineering Structures, 2018, 167: 549-566.
- [20] 袁颖, 林皋, 周爱红, 等. 基于不完备模态测试信息的结构损伤识别方法研究[J]. 大连理工大学学报, 2007, 47(5): 693-698.
- YUAN Ying, LIN Hao, ZHOU Aihong, et al. Study of Damage Identification Based on Incomplete Modal Measurements [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2007, 47(5): 693-698.