

螺旋度及螺旋度方程的讨论^{*}

陆慧娟 高守亭

(中国科学院大气物理研究所, 北京, 100029)

摘 要

文中从无摩擦的运动方程出发, 利用量纲分析的方法, 导出简化了的螺旋度方程和不同方向上的螺旋度方程, 并对影响它们变化的各因子进行了讨论。分析结果表明, 除了 Lilly 在 1986 年研究中强调的浮力效应外, 压力梯度与涡度共同作用项和力管项对螺旋度的变化也有重要影响, 甚至比浮力效应更大, 且力管作用、水平压力梯度与水平涡度共同作用主要影响水平螺旋度, 浮力效应、垂直压力梯度与垂直涡度共同作用主要影响垂直螺旋度; 螺旋度的输送和大气的辐散、辐合对螺旋度变化的影响较弱; 地转偏向力(无论是在水平方向还是垂直方向)的作用要在系统水平尺度较大时才能体现出来。水平和垂直方向上的螺旋度既相互区别在暴雨、强对流天气过程中表现出不同的作用, 又相互联系。一方面, 水平螺旋度更具预示性, 对预报强风暴有指示意义, 而垂直螺旋度更倾向为能反映系统的维持状况和系统发展、天气现象的剧烈程度的一个参数。另一方面, 大的正水平螺旋度有助于垂直螺旋度的增长, 而与垂直螺旋度对应的运动可能对水平螺旋度产生影响。将中尺度模式和螺旋度计算结合起来可能可以提高风暴路径和雨区的预报准确度。

关键词: 螺旋度, 强风暴, 不同方向上的螺旋度。

1 引 言

螺旋度是表征流体边旋转边沿旋转方向运动的动力特性的物理量, 最早用来研究流体力学中的湍流问题, 在等熵流体中具有守恒性质^[1,2]。其严格定义为 $H = \iiint \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) d\tau$, 通常人们所说的螺旋度是局地螺旋度 h , 定义为 $h = \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V})$ 。螺旋度的重要性还在于它比涡度包含了更多辐散风效应, 更能体现大气的运动状况, 其值的正负情况反映了涡度和速度的配合程度。自 20 世纪 80 年代以来, 气象学者将螺旋度应用到对强对流风暴的旋转发展维持机制和其他相关的大气现象研究中, 并对其在强对流天气分析预报中的应用进行了数值试验和诊断分析。

Lilly^[3,4] 最早将螺旋度正式地引入到强对流风暴研究中。他的研究指出强对流风暴具有高螺旋度特征, 它的螺旋度从环境场中获得并在浮力效应下增强, 同时, 高螺旋度阻碍了扰动能量耗散, 对超级单体风暴的维持有重要作用; 稳定的强对流风暴常

发生在螺旋度值大的地方。Etling^[5] 讨论总结了大气中存在的几种典型螺旋流, 并指出流体稳定性与螺旋度密切相关。Wu 等^[6] 对切变热对流扰动中螺旋度的产生以及螺旋度与非线性能量传输之间的关系进行了研究。中国气象学者也较早对螺旋度的性质、应用做了研究。伍荣生等^[7] 推导出完全的螺旋度方程, 并指出若不计摩擦、在准地转运动中, 大气的螺旋度具有守恒的性质。Tan 等^[8] 讨论、研究了螺旋度在边界层和锋区的动力性质。刘式适等^[9] 研究指出定常准地转模式中的螺旋度紧密地与大气垂直运动有关, 即对于定常的大气大尺度运动, 稳定层结下的上升运动对应正螺旋度, 下沉运动对应负螺旋度; 同样, 螺旋度也紧密地与温度平流有关, 暖平流对应正螺旋度, 冷平流对应负螺旋度。

螺旋度的重要性不仅体现在理论研究方面, 还在于它在强对流天气分析预报中的应用。基于螺旋度的理论研究^[3,4,10] 及后来的数值模拟结果^[11~15] 和观测资料分析^[16~21], 螺旋度逐渐成为引入天气分析预报中的一个重要物理量。

^{*} 初稿时间: 2003 年 7 月 3 日; 修改稿时间: 2003 年 9 月 1 日。
资助课题: 中国科学院海外杰出学者基金(2002-1-2), 中国科学院创新工程(KZCX3-SW-213) 和奥运科技专项(2001BA904B09)。

众所周知, 大气是一个动力系统, 人们关心表征其运动状态的物理量的变化趋势甚于关心这些物理量本身。因此, 对影响螺旋度变化的因子进行研究是重要而有意义的, 而这恰恰是过去研究所缺乏的。1986 年, Lilly^[4] 在研究具有强螺旋性对流风暴的结构、能量及其传播时, 在假设密度为常数和忽略科氏力影响的条件下, 曾推导过螺旋度方程, 并强调浮力效应对螺旋度的时间倾向影响很大。在实际情况下, 密度不是常数, 忽略密度的变化主要是影响力管效应, 即大气斜压性不能很好地体现出来, 而观测事实表明, 强风暴天气常发生于风垂直切变大, 即斜压性强的地方; 另一方面, 造成中国灾害性天气的大气系统常为中尺度或次天气尺度, 科氏力的作用可能对螺旋度变化也有一定的影响。伍荣生等^[7] 从原始方程出发推导了完全的螺旋度方程, 但没有详细讨论各影响因子的相对重要性。文中针对这些问题进行了进一步地讨论。

2 螺旋度方程

无摩擦的运动方程为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times \mathbf{V} - \mathbf{g}$$

这里 $\mathbf{V} = (u, v, w)$ 。

为了能更突出中尺度的热力效应和计算方便,

这里引入无量纲数 $\pi = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R_d}{c_p}}$, 则气压梯度力项可

写为 $\frac{1}{\rho} \nabla p = c_p \theta \nabla \pi$, 故运动方程变为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -c_p \theta \nabla \pi - 2\Omega \times \mathbf{V} - \mathbf{g} \quad (1)$$

研究中小尺度问题我们常对式(1)进行简化, 假设任一大气热力学变量 A 可看成是满足静力平衡的基态 A 和中尺度扰动量 A' 之和, 即 $A = A(z) + A'$ 。

则垂直分量运动方程的右端项有

$$\begin{aligned} -c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial z} - \mathbf{g} &= -c_p (\theta + \theta') \frac{\partial (\pi + \pi')}{\partial z} - \mathbf{g} \\ &= -c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial z} + g \frac{\theta'}{\theta} \end{aligned}$$

我们就可以得到常用的中尺度方程是

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -c_p \theta \nabla \pi' - 2\Omega \times \mathbf{V} + \mathbf{b} \quad (2)$$

这里 $\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{k} = g \frac{\theta'}{\theta} \mathbf{k}$ 。

对式(2)进行叉乘运算, 并计 $\nabla \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \zeta)$, $\mathbf{T} = -c_p \theta \nabla \pi' - 2\Omega \times \mathbf{V} + \mathbf{b}$ 则得涡度方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \\ (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{T} \end{aligned} \quad (3)$$

分别对式(2), (3)点乘 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathbf{V}$ 得

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{T} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \\ (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V}] = \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) \end{aligned} \quad (5)$$

记 $h = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}$, 式(4)与(5)相加得

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) h + h (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \\ \mathbf{V} \cdot [(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V}] = \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{T} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} h) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} |\mathbf{V}|^2) \\ = \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{T} \end{aligned} \quad (6)$$

将方程右边展开有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{T} &= \boldsymbol{\omega} \cdot (-c_p \theta \nabla \pi' - 2\Omega \times \mathbf{V} + \mathbf{b}) \\ &= -\boldsymbol{\omega} \cdot c_p \theta \nabla \pi' - \boldsymbol{\omega} \cdot (2\Omega \times \mathbf{V}) + b\zeta \\ &= -\boldsymbol{\omega} \cdot c_p \theta \nabla \pi' - 2\Omega \cdot (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}) + b\zeta \\ &= -\boldsymbol{\omega} \cdot c_p \theta \nabla \pi' - 2\Omega \cdot \left[\frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{V}) - \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] + b\zeta \\ \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) &= \mathbf{V} \cdot \left[\nabla \times (-c_p \theta \nabla \pi' - 2\Omega \times \mathbf{V} + \mathbf{b}) \right] \\ &= \mathbf{V} \cdot (\nabla \pi' \times \nabla c_p \theta) - \mathbf{V} \cdot [\nabla \times (2\Omega \times \mathbf{V})] + \\ &\quad \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\ &\quad (\text{考虑对于中小尺度问题 } 2\Omega \text{ 可看为常数}) \\ &= \mathbf{V} \cdot (\nabla \pi' \times \nabla c_p \theta) - \mathbf{V} \cdot [2\Omega \cdot (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \\ &\quad (2\Omega \cdot \nabla) \mathbf{V}] + \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{b} \times \mathbf{k}) \end{aligned}$$

则螺旋度方程可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= -\nabla \cdot (h \mathbf{V}) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} |\mathbf{V}|^2) + \mathbf{V} \cdot (\nabla \pi' \times \\ &\quad \nabla c_p \theta) - \boldsymbol{\omega} \cdot c_p \theta \nabla \pi' + b\zeta - 2\Omega \cdot \mathbf{V} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \\ &\quad 2\Omega \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{b} \times \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (7)$$

从这个方程可看到螺旋度的变化不仅与其平流、涡度和速度相关, 还受力管项、气压梯度和地转偏向力的影响。

为了从理论上分析影响螺旋度变化因子的相对重要性, 我们用量纲分析的方法对方程右边项进行

分析. 记 U, V 和 W 为速度水平和垂直分量的特征尺度; L_x, L_y 和 D 为扰动的水平和垂直尺度; θ, Θ 分别为 θ' 和 θ 的特征尺度, $\Delta_h \theta$ 为 θ' 的水平变动尺度, $\Delta_z \Theta$ 为 θ 的垂直变动尺度; H 为等熵大气在 Θ

下的大气高度, 定义 $H = \frac{c_p \Theta}{g}$; $\Delta_h \pi$ 和 $\Delta_z \pi$ 为 π' 的水平和垂直变动尺度, h 为 h 的特征尺度. 简单起见设 $L_x \approx L_y \approx L, U \approx V$.

$$\begin{aligned} h = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} &= u \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= u \frac{\partial w}{\partial y} - v \frac{\partial w}{\partial x} + w \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z} \\ &\quad \frac{UW}{L} \quad \quad \quad \frac{U^2}{D} \end{aligned}$$

故对应有 $h \approx \frac{U^2}{D}$

$$\text{第 1 项} = - \boldsymbol{\omega} \cdot (h \mathbf{V}) = - \left(\frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} \right) - \frac{\partial w h}{\partial z} \\ \frac{U^3}{LD} \quad \quad \quad \frac{WU^2}{D^2}$$

$$\begin{aligned} \text{第 2 项} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} |\mathbf{V}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial (u^2 + v^2 + w^2)}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial (u^2 + v^2 + w^2)}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial (u^2 + v^2 + w^2)}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w^2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w^2}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^2}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w^2}{\partial z} \right] \\ &\quad \frac{WU^2}{2L^2} \quad \quad \quad \frac{UW^2}{2LD} \quad \quad \quad \frac{W^3}{2L^2} \\ &\quad \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial z} \Big] \\ &\quad \frac{U^3}{2LD} \end{aligned}$$

$$\text{第 3 项} = \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) = c_p u \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial y} - c_p v \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial x} \\ \frac{c_p U \Delta_z \Theta \Delta_h \pi}{LD}$$

$$\begin{aligned} \text{第 4 项} &= - \boldsymbol{\omega} \cdot c_p \theta \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = c_p \theta \frac{\partial \pi'}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + c_p \theta \frac{\partial \pi'}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + c_p \theta \frac{\partial \pi'}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= c_p \theta \frac{\partial \pi'}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + c_p \theta \left(\frac{\partial \pi'}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \pi'}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + c_p \theta \left(\frac{\partial \pi'}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \pi'}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &\quad \frac{c_p U \Theta \Delta_z \pi}{LD} \quad \quad \quad \frac{c_p U \Theta \Delta_h \pi}{LD} \quad \quad \quad \frac{c_p W \Theta \Delta_h \pi}{L^2} \end{aligned}$$

$$\text{第 5 项} = b \zeta = g \frac{\theta'}{\Theta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \text{ 对应为 } g \frac{\theta}{\Theta} \frac{U}{L} = \frac{c_p \theta U}{H L}$$

$$\begin{aligned} \text{第 6 项} &= - 2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V} \times \mathbf{V} + 2 \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{V}) \mathbf{V} (\boldsymbol{\Omega} = \Omega_2 \mathbf{j} + \Omega_3 \mathbf{k} = \Omega \cos \mathcal{G} + \Omega \sin \mathcal{G} \boldsymbol{\mathcal{K}} \quad \Omega = |\boldsymbol{\Omega}|) \\ &= - 2 \Omega_2 v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2 \Omega_3 w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \Omega_2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ &\quad 2 \Omega_3 \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= - 2 \Omega_2 v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \Omega_2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2 \Omega_3 w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \Omega_3 \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2 \Omega_2 \left(w \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &\quad \frac{2 \Omega_2 U^2}{L} \quad \quad \quad \frac{2 \Omega_3 W U}{L} \quad \quad \quad \frac{2 \Omega_2 U W}{D} \end{aligned}$$

$$\text{第 7 项} = \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = u \frac{\partial b}{\partial y} - v \frac{\partial b}{\partial x} = u \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta'}{\partial y} - v \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta'}{\partial x} \quad g \frac{\Delta_h \theta U}{\Theta L}$$

Lilly^[4]强调浮力效应对螺旋度具有重要影响,故文中将螺旋度方程各项除以 $b\zeta$, 则各项的大小估算如下:

$$\text{第 1 项} \quad \frac{U^3}{LD} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{H U^2}{c_p \theta D} \right|$$

$$\frac{W U^2}{D^2} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{U W H L}{c_p \theta D^2} \right|$$

$$\text{第 2 项} \quad \frac{W U^2}{2 L^2} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{W U H}{2 c_p \theta L} \right|$$

$$\frac{W^3}{2 L^2} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{W^3 H}{2 c_p \theta U L} \right|$$

$$\frac{U^3}{2 L D} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{U^2 H}{2 c_p \theta D} \right|$$

$$\frac{W^2 U}{2 L D} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{W^2 H}{2 c_p \theta D} \right|$$

$$\text{第 3 项} \quad \frac{c_p U \Delta_z \Theta \Delta_h \pi}{LD} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{\Delta_z \Theta \Delta_h \pi H}{\theta D} \right|$$

$$\text{第 4 项} \quad \frac{c_p W \Theta \Delta_h \pi}{L^2} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{W \Theta H \Delta_h \pi}{U \theta L} \right|$$

$$\frac{c_p U \Theta \Delta_z \pi}{LD} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{\Theta H \Delta_z \pi}{\theta D} \right|$$

$$\frac{c_p U \Theta \Delta_h \pi}{LD} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{\Theta H \Delta_h \pi}{\theta D} \right|$$

$$\text{第 6 项} \quad \frac{2 \Omega_2 U^2}{L} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{2 \Omega_2 U H}{c_p \theta} \right|$$

$$\frac{2 \Omega_2 W U}{D} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{2 \Omega_2 W H L}{c_p \theta D} \right|$$

$$\frac{2 \Omega_3 W U}{L} \left| \frac{c_p \theta U}{HL} = \frac{2 \Omega_3 W H}{c_p \theta} \right|$$

$$\text{第 7 项} \quad g \frac{\Delta_h \theta}{\Theta L} \left| \frac{U}{\Theta L} = \frac{\Delta_h \theta}{\Theta} \right|$$

从上面的表达式很容易看出, 某些项相对于浮力项的大小会因 $\frac{H}{L}$, $\frac{H}{D}$, $\frac{W}{U}$ 的大小不同而不同, 下面将分别讨论。

中纬度的中尺度运动各基本尺度的量级分别可取为

$$c_p \approx 10^3 \text{ J/(K} \cdot \text{kg)} \quad \Theta \approx 3 \times 10^2 \text{ K}$$

$$H = \frac{c_p \Theta}{g} \approx 10^4 \text{ m} \quad U \approx 10 \text{ m/s}$$

$$\theta \approx \Delta_h \Theta \approx 10^0 \sim 10^1 \text{ K} \quad \Delta_z \Theta \approx 10^1 \text{ K}$$

$$W \approx 10^{-1} \sim 10^1 \text{ m/s} \quad 2 \Omega_2 \approx 2 \Omega_3 \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

(1) 对于深对流 $\frac{D}{H} < 1$, 但不是很小, 垂直运动较强 $W \approx U$, 则有:

对应于第 1, 2 项

$$\frac{H U^2}{c_p \theta D} \approx \frac{100}{10^3 \cdot \theta} \cdot \frac{H}{D}$$

$$\frac{W U H}{2 c_p \theta L} \approx \frac{W^3 H}{2 c_p \theta U L} \approx \frac{100}{2 \cdot 10^3 \cdot \theta} \cdot \frac{H}{L}$$

$\frac{H U^2}{2 c_p \theta D} \approx \frac{W^2 H}{2 c_p \theta D} \approx \frac{100}{2 \cdot 10^3 \cdot \theta} \cdot \frac{H}{D}$ 无论温度扰动是强还是弱, 都小于 1; $\frac{W U H L}{c_p \theta D^2} \approx \frac{100}{10^3 \cdot \theta} \cdot \frac{H}{D} \cdot \frac{L}{D}$ 当水平尺度较大时此项可与 1 相当, 则一般而言这两项相对于浮力项都是可忽略的。

虽然一般而言中尺度系统的气压梯度比大尺度系统的大, 但主要原因是系统的水平和垂直方向的尺度不同, 而气压的水平和垂直变动与大尺度的相当, 故可以用大尺度的水平和垂直变动来做估计。对于中纬度大尺度运动, 由地转关系有 $c_p \Theta \cdot \frac{\Delta_h \pi}{L} \approx 2 \Omega_3 U \approx 10^{-3} \text{ m/s}^2$, $L \approx 10^6 \text{ m}$, 可推得 $\Delta_h \pi \approx 10^{-2}$; 类似由静力平衡关系, 可以估计 $\Delta_z \pi \approx 10^0$ 。

则对应于第 3 项

$$\frac{\Delta_z \Theta \Delta_h \pi H}{\theta D} \approx \frac{10^1 \cdot 10^{-2} H}{\theta D} \quad \text{与 1 相当;}$$

对应于第 4 项

$$\frac{\Theta H \Delta_z \pi}{\theta D} \approx \frac{10^2 \cdot 10^0}{\theta} \cdot \frac{H}{D} \quad \text{大于 1;}$$

$$\frac{\Theta H \Delta_h \pi}{\theta D} \approx \frac{10^2 \cdot 10^{-2}}{\theta} \cdot \frac{H}{D} \quad \text{与 1 相当;}$$

$$\frac{W \Theta H \Delta_h \pi}{U \theta L} \approx \frac{10^2 \cdot 10^{-2}}{\theta} \cdot \frac{H}{L} \quad \text{当 } H \approx L, \text{ 温度扰动较小时, 可与 1 相当, 否则小于 1。}$$

对应于第 6 项

$$\frac{2 \Omega_2 U H}{c_p \theta} \approx \frac{2 \Omega_3 W H}{c_p \theta} \approx \frac{10^{-4} \cdot 10 \cdot 10^4}{10^3 \cdot \theta} \quad \text{此值远小于 1。}$$

$$\frac{2 \Omega_2 W H L}{c_p \theta D} \approx \frac{10^{-4} \cdot 10 \cdot H L}{10^3 \cdot \theta \cdot D} \quad \text{当水平尺度较大时, 此值可与 1 相当; 水平尺度较小时, 此值远小于 1。}$$

对应于第 7 项 $\frac{\Delta_h \theta}{\theta}$ 除在锋面附近外, 位温扰动经过 L 距离的变动量达不到本身的量级故该项量级远小于 1。

由上述分析可见, 在深对流的情况下, 压力梯度与涡度共同作用项和力管项对螺旋度的变化有重要影响, 甚至比 Lilly 强调的浮力效应大; 浮力的水平分布不均对螺旋度的影响也不可忽略; 螺旋度的输送和大气的辐散、辐合对螺旋度的变化的影响较弱; 地转偏向力(无论是在水平方向还是垂直方向)的作用要在系统水平尺度较大(α 中尺度)时才

能体现出来。

(2) 对于浅对流 $\frac{D}{H} \ll 1$, 类似有:

对应于第 1, 2 项 $\frac{H U^2}{c_p \theta D}$, $\frac{W U H L}{c_p \theta D^2}$ 当温度扰动弱

时, 可与 1 相当, 否则小于 1, $\frac{W^2 H}{2 c_p \theta D}$, $\frac{H U^2}{2 c_p \theta D}$,

$\frac{W^3 H}{2 c_p \theta U L}$, $\frac{W U H}{2 c_p \theta L}$ 小于 1。

对应于第 3 项 $\frac{\Delta_z \Theta \Delta_h \pi H}{\theta D}$ 与 1 相当或大于 1。

对应于第 4 项 $\frac{\Theta H \Delta_z \pi}{\theta D}$, $\frac{\Theta H \Delta_h \pi}{\theta D}$ 大于 1; 而 $\frac{W \Theta H \Delta_h \pi}{U \theta L}$ 若 $W \approx U$, $H \approx L$, 温度扰动较小时, 可与 1 相当, 否则小于 1。

对应于第 6 项 $\frac{2 \Omega_2 U H}{c_p \theta}$, $\frac{2 \Omega_3 W H}{c_p \theta}$ 值很小; $\frac{2 \Omega_2 W H L}{c_p \theta D}$ 的值当垂直运动较强、水平尺度也较大时可与 1 相当, 否则小于 1。

对应于第 7 项 $\frac{\Delta_h \theta}{\theta}$ 除锋区外都较小。

由以上分析可见, 在浅对流的情况下, 压力梯度与涡度共同作用项和力管项仍是影响螺旋度变化的重要因子; 浮力的水平分布不均匀在锋区对螺旋度的影响也不可忽略, 而螺旋度的输送、大气的辐散、辐合对螺旋度变化的影响比深对流时大。

综合上述分析, 保留螺旋度方程中与 1 相当和大于 1 的相应项, 则简化的螺旋度方程可写为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c_p u \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \pi}{\partial y} - c_p v \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \pi}{\partial x} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial z} \zeta + b \zeta \quad (8)$$

从上式我们不难看出, 螺旋度的变化趋势不仅与风场和涡度现有的状况有关, 还与制造风场、涡度的源项有关, 而有趣的是, 螺旋度反映涡度和速度的配合程度, 影响其变化趋势的因子也可说是一些反映配合程度的量, 当水平风场和水平力管(水平涡度源项)、涡度和气压梯度(风源项)及浮力(垂直方向风的另一源项)与垂直涡度配合时, 即乘积为正, 有利于螺旋度的增加。另外, 前 4 项与水平方向的力管、涡度和气压梯度联系, 而后 2 项则与垂直方向的涡度、浮力场、气压梯度联系; 在量级上前 5 项会比第 6 项, 即浮力效应项大些。

3 不同方向上的螺旋度的讨论

根据向量分析的定义, 螺旋度属于假标量^[21],

$h = \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = u \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ 右端 3 项各有不同的意义, 它们分别与 x, y, z 方向的风速和涡度的分量联系在一起, 其值相同时也可能会有不同的运动形式。故有必要进一步讨论不同方向上螺旋度在暴雨、强对流天气过程中的演化情况、相互关系以及影响它们的因子。方便起见, 不妨称之为 x -螺旋度, y -螺旋度(合称为水平螺旋度), z -螺旋度, 分别记为 h_1, h_2, h_3 。

首先, 从各方向上螺旋度的定义开始分析。水平螺旋度即水平风速和水平涡度的积。其正值异常增大(即二者同号, 相互配合)可能是水平风速增大也可能是水平涡度增大或二者都增大, 都会对应大气的异常状态, 与预报强对流风暴的一些参数联系, 具有预示性。一方面, 水平风速增大可以对应常与暴雨联系的急流。例如, 西南低空急流可以造成强的暖湿空气输送, 加强层结不稳定性, 进而触发不稳定能量释放; 在其左前方有水汽辐合, 其左侧有气旋性切变, 可产生或增加垂直涡度。通过该地区的高空急流可以增强风的垂直切变, 理查逊(Richardson)数减小, 有利于对流发展并使水平方向涡度增加。另一方面, 水平涡度主要由水平风场的垂直切变决定, 而水平风垂直切变恰恰是预报强对流风暴的一个重要参数, 与大气不稳定、强对流天气联系紧密; 另外, 也许更重要的是: 水平涡度可以通过对流上升运动发生扭转使得垂直方向的涡度增大, 进而促进系统发展; 水平涡度大表明在适当情况下空气可形成强的垂直环流的趋势大, 并在对流发生后有助于垂直环流的维持。从这个角度上说, 它是垂直涡度获得或增加的一个重要源泉。

从量级上看(至少在风暴初期), 水平螺旋度比垂直螺旋度大, 较大程度上决定了总螺旋度的情况, 一些诊断、研究工作也证实了这一点^[14, 15, 19]。同时, 其预示性和重要性充分体现在业务预报中。通常人们计算的螺旋度实质上是水平螺旋度, 确切地说是忽略垂直运动水平分布不均下的相对风暴水平螺旋度: $H = \int_0^h (\bar{\mathbf{V}}_H - \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\omega}_H dz$ (式中 $\bar{\mathbf{V}} = (u(z), v(z))$ 为环境风场, $\mathbf{C} = (C_x, C_y)$ 为风暴传播速度, $\boldsymbol{\omega}_H = \mathbf{k} \times \frac{d \bar{\mathbf{V}}_H}{dz}$ 为水平涡度矢量, h 为气层

厚度,通常取 3 km),实际工作中常利用单站探空风资料,将上式转换为 $H = \sum_{n=0}^{N-1} [(u_{n+1} - C_x)(v_n - C_y) - (u_n - C_x)(v_{n+1} - C_y)]$,并将螺旋度 $H = 150 \text{ m}^2/\text{s}^2$ 作为强对流风暴发生发展的临界值^[23]。

垂直螺旋度是垂直涡度和垂直速度的积。垂直涡度大的系统与剧烈天气现象联系紧密,如中尺度气旋,故垂直涡度变化在气象研究和业务预报中一向是重点关注对象。另一方面,垂直速度是实际大气中造成天气现象的最直接的原因。单有涡旋缺乏垂直上升运动、大气辐散辐合,天气现象不会发生;而单有垂直上升运动、大气辐散辐合,运动难以维持,系统持续时间不长、影响小。因此,尽管垂直螺旋度的量级一般比水平螺旋度小,业务中计算螺旋度也常忽略它,但它充分反映了两个与天气现象紧密联系的物理量的配合情况,在一定程度上不仅能反映系统的维持状况,还能反映系统发展、天气现象的剧烈程度。不少实际诊断^[19, 21, 24, 25]表明垂直螺旋度的分布与雨区配合较好。

为了进一步研究水平和垂直螺旋度的关系及各自作用,这里利用式(1)和(2)的分量方程,并计 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \zeta)$,推导 3 个方向上的螺旋度方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} = & -(\mathbf{V} \cdot \nabla) h_1 - h_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \right. \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + c_p u \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial y} - c_p \theta \omega_1 \frac{\partial \pi'}{\partial x} + \\ & u \frac{\partial b}{\partial y} + 2 \Omega_2 \left(u \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_1 w \right) + \\ & 2 \Omega_3 \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + \omega_1 v \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2}{\partial t} = & -(\mathbf{V} \cdot \nabla) h_2 - h_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} - \right. \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - c_p v \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial x} - c_p \theta \omega_2 \frac{\partial \pi'}{\partial x} - \\ & v \frac{\partial b}{\partial x} - 2 \Omega_2 \left(v \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ & 2 \Omega_3 \left(v \frac{\partial v}{\partial z} - \omega_2 u \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_3}{\partial t} = & -(\mathbf{V} \cdot \nabla) h_3 - h_3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \right. \\ & \left. \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - c_p \theta \zeta \frac{\partial \pi'}{\partial z} + b \zeta + 2 \Omega_2 \left(w \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\ & \left. \zeta u \right) - 2 \Omega_3 \left(w \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

根据前面的量纲分析结果,式(9)~(11)可简化为

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = c_p u \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial y} + c_p \theta \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial x} \quad (12)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = -c_p v \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial x} - c_p \theta \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial y} \quad (13)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial t} = b \zeta - c_p \theta \zeta \frac{\partial \pi'}{\partial z} \quad (14)$$

通过分析不难发现影响不同方向上螺旋度的因子区分明显,对照第 2 节中的简化螺旋度方程,可以看到,总的螺旋度变化是不同方向上螺旋度变化的综合体现:简化螺旋度方程中前 4 个与水平方向的力管、涡度和气压梯度相联系的影响因子都出现在水平方向螺旋度方程中;而后 2 个与垂直方向的涡度、浮力场、气压场联系的因子则出现在垂直方向螺旋度方程中。当这些影响因子相互配合时,有利于水平和垂直螺旋度的增加。

上述方程还存在这样的差别:影响水平螺旋度变化的两个主要因子分别与组成水平螺旋度的水平风和水平涡度有关;而影响垂直螺旋度变化的两个主要因子尽管都来源于垂直运动方程,都与垂直涡度有关,而不直接与垂直速度联系。因此,垂直涡度的初始状态十分重要,又因为水平涡度的扭转对垂直涡度有重要影响^[26],所以,初始的水平涡度情况也很重要。另外,正如 Lilly 所强调的,浮力效应对螺旋度增长也有重要作用,既体现在引发对流、促进垂直速度增长上,又体现在与垂直涡度配合促进垂直螺旋度增长上。

综合以上分析,得到如下结论:水平和垂直方向上的螺旋度既相互区别又相互联系,它们在暴雨、强对流天气过程中表现出不同的作用。水平螺旋度更具预示性,对预报强风暴有指示意义;垂直螺旋度更倾向为能反映系统的维持状况和系统发展、天气现象的剧烈程度的一个参数。因为水平螺旋度为垂直螺旋度的形成或增长提供有利条件,所以水平力管对水平螺旋度的作用不可忽视,同时垂直运动的触发、浮力效应和水平涡度的扭转对垂直螺旋度的生成和发展有重要作用。

4 结 论

文中首先从无摩擦的运动方程出发,推导出总螺旋度方程,并利用量纲分析方法对总螺旋度方程进行了简化,发现除浮力效应外,压力梯度与涡度共同作用项和力管项对螺旋度的变化也有重要影响,甚至比浮力效应更大,浮力的水平分布不均对螺旋度的影响也不可忽略;螺旋度的输送和大气的辐散、辐合对螺旋度的变化的影响较弱;地转偏向力(无论是在水平方向还是垂直方向)的作用要在系

统水平尺度较大时才能体现出来。其次,对不同方向上的螺旋度进行了讨论,结果表明影响不同方向上螺旋度的因子区分明显,水平螺旋度主要与水平方向的力管、涡度和气压梯度相联系;而垂直螺旋度主要与垂直方向的涡度、浮力、气压梯度联系。同时,二者又相互联系,在暴雨、强对流天气过程中表现出不同的作用。水平螺旋度能为垂直螺旋度的形

成或增长提供有利条件,并更具预示性,对预报强风暴有指示意义;垂直螺旋度更倾向为能反映系统的维持状况和系统发展、天气现象的剧烈程度的一个参数。将中尺度模式和螺旋度计算结合起来可能可以提高风暴路径和雨区的预报准确度。而以上的结论主要源于理论上的推导和推断,还需要进一步通过实例的数值模拟和诊断分析来研究和论证。

参考文献

- 1 Moffat H K. On the knottedness of tangled vortex lines. *J Fluid Mech*, 1969, 35: 117~ 128
- 2 Moffat H K. Some developments in the theory of turbulence. *J Fluid Mech*, 1981, 106: 27~ 47
- 3 Lilly D K. The structure, energetics and propagation of rotating convective storms. Part I: Energy exchange with the mean flow. *J Atmos Sci*, 1986, 43: 113~ 125
- 4 Lilly D K. The structure, energetics and propagation of rotating convective storms. Part II: Helicity and storm stabilization. *J Atmos Sci*, 1986, 43: 126~ 140
- 5 Etling D. Some aspects of helicity in atmosphere flows. *Beitr Phys Atmos*, 1985, 58: 88~ 100
- 6 Wu W S, Lilly D K, Kerr R M. Helicity and thermal convection with shear. *J Atmos Sci*, 1992, 49: 1800~ 1809
- 7 伍荣生, 谈哲敏. 广义涡度与位势涡度守恒定律及应用. *气象学报*, 1989, 47(4): 436~ 442
- 8 Tan Zheming, Wu Rongsheng. Helicity dynamics of atmospheric flow. *Adv Atmos Sci*, 1994, 11(2): 175~ 188
- 9 刘式适, 刘式达. 大气运动的螺旋度分解和Beltrami流. *大气科学*, 1997, 21(2): 151~ 160
- 10 Davies-Jones R P. Streamwise vorticity: The origin of updraft rotation in supercell storms. *J Atmos Sci*, 1984, 41: 2991~ 3006
- 11 Brooks H E, Wilhelmson R B. The effect of low-level hodograph curvature on supercell structure. Preprints, 16th Conf. on Severe Local Storms, Kananaskis Park, AB, Canada, Amer Meteor Soc, 1990, 34~ 39
- 12 Brooks H E, Doswell III C A, Davies-Jones R P. Environmental helicity and the maintenance and evolution of low-level meso-cyclones. The Tornado: Its Structure, Dynamics, Prediction, and Hazards, *Geophys. Monogr*, No. 79, Amer Geophys Union, 1993, 97~ 104
- 13 Droegemeier K K, Lazarus S M, Davies-Jones R P. The influence of helicity on numerically simulated convective storms. *Mon Wea Rev*, 1993, 121: 2005~ 2029
- 14 李耀辉, 寿绍文. 旋转风螺旋度及其在暴雨演变过程中的作用. *南京气象学院学报*, 1999, 22(1): 95~ 102
- 15 Fei Shiqiang, Tan Zheming. On the helicity dynamics of severe convective storms. *Adv Atmos Sci*, 2001, 18(1): 67~ 86
- 16 Leftwich P W. On the use of helicity in operational assessment of severe local storm potential. Preprints, 16th Conf. on Severe Local Storms, Kananaskis Park, AB, Canada, Amer Meteor Soc, 1990, 269~ 274
- 17 Davies J M, Johns R H. Some wind and instability parameters associated with strong and violent tornadoes. Part I: Wind shear and helicity. The Tornado: Its Structure, Dynamics, Prediction, and Hazards, *Geophys. Monogr*, No. 79, Amer Geophys Union, 1993, 573~ 582
- 18 Johns R H, Davies J M, Leftwich P W. Some wind and instability parameters associated with strong and violent tornadoes. Part II: Variations in the combinations of wind and stability parameters. The Tornado: Its Structure, Dynamics, Prediction, and Hazards, *Geophys. Monogr*, No. 79, Amer Geophys Union, 1993, 583~ 590
- 19 杨越奎, 刘玉玲, 万振控等. “91.7”梅雨锋暴雨的螺旋度分析. *气象学报*, 1994, 52(3): 379~ 384
- 20 Hales J E, Vescio M D. The March 1994 Tornado outbreak in the southeast U S. “The forecast process from an SPC perspective.” Preprints, 18th Conf. on Severe Local Storms, San Francisco, CA, Amer Meteor Soc, 1996, 32~ 36
- 21 吴宝俊, 许晨海, 刘延英等. 螺旋度在分析一次三峡大暴雨中的应用. *应用气象学报*, 1996, 7(1): 108~ 112
- 22 柯青 H E. 向量计算及张量计算初步. 北京: 商务印书馆, 1954. 54~ 56
- 23 Davies-Jones R P, Burgess D W, Foster M. Test of helicity as a forecast parameter. Preprints, 16th Conf. on Severe Local Storms, Kananaskis Park, AB, Canada, Amer Meteor Soc, 1990, 588~ 592
- 24 谭志华, 杨晓霞. “99.8”山东特大暴雨的螺旋度分析. *气象*, 2000, 26(9): 7~ 11
- 25 刘惠敏, 郑兰芝. 螺旋度诊断分析与短时强降水雨量预报. *气象*, 2002, 28(10): 37~ 40
- 26 Gao Shouting, Lri Ting. Streamwise vorticity equation. *Adv Atmos Sci*, 2000, 17(3): 339~ 347

ON THE HELICITY AND THE HELICITY EQUATION

Lu Huijuan Gao Shouting

(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029*)

Abstract

In this paper, a simplified helicity equation is derived from the basic momentum equations by dimensional analysis, and the effect factors of helicity variation are discussed. Furthermore, the characteristics of the horizontal helicity and the vertical helicity are investigated. The analysis results show that among these effect factors, besides the buoyancy effect emphasized in Lilly's study (1986), the solenoid, the pressure gradient force and the vorticity have important effects on the variation of helicity, while the Coriolis force just makes effect when the horizontal scale is large. The effect factors of the horizontal helicity and the vertical helicity are different. The variation of horizontal helicity is affected mainly by the horizontal solenoid, vorticity and pressure gradient force, while the variation of vertical helicity is closely related to the vertical pressure force and the buoyancy force. Besides, they have different behavior with storm development and evolution. The positive anomaly of the horizontal helicity may be a precursor of a convective storm, while the positive anomaly of the vertical helicity may be a parameter, which may reflect the intensity and stability of a convective storm. However, these two kinds of helicity are relative and interactive. On the one hand, the positive anomaly of the horizontal helicity can contribute to the increase of the vertical helicity, in turn, the motion responding to high vertical helicity can affect the horizontal helicity.

Key words: Helicity, Severe storms, Helicity in different directions.