

正压原始方程套网格试验*

陆维松

提 要

本文用“单向”(one-way)方法进行正压原始方程套网格试验。粗、细网格均采用空间分解准拉格朗日格式和由廖洞贤等提出的与此差分格式一致的内边界条件^[1](即方案二)。试验结果表明,用方案二作出的24小时细网格预报,与按半动量格式和粗网格直接给细网格提供内边界条件(即方案一)所得的结果相比,去除了在流出处出现的不稳定,系统的流入、流出也较好。这两种方案再加上Davies“松弛区域”的方法^[2](分别为方案四,方案三),其结果与上述类似,且方案四比方案二还要好些。

一、引 言

许多重要的天气现象虽然尺度较小,却与大尺度的大气运动紧密联系,需要很细的网格才能分辨出来(如雷暴、台风等)。考虑我们所关心的往往是有限区,所以为了节省工作量,人们常用细网格描述所关心的区域,而用粗网格描述比该区域更大的区域。但是,在粗、细网格之间的内边界附近,易于出现不稳定现象,阻碍了系统的流入和流出,甚至破坏计算。

查尼(Charney)等(1950)曾给出在有限区域内积分正压涡度方程所需要的边界条件^[3]。后来(1962)推广到原始方程^[4]。戴维斯(Davies)等(1972)证明了和原始方程适定的边界条件的判据^[5]。但这种适定的边界条件至今还未得到。

在实际工作中,人们采用的边界条件大致可分为两类:一类是强加的经验方法,如由粗网格直接给细网格提供边界条件^[6],相当于固定边界条件。还有Davies(1976)的“松弛区域”方法,虽对抑制计算不稳定有一定作用,但缺乏物理意义。另一类是物理上较为合理的方法^[7]。夏皮罗(Shapiro)(1970)等在套网格试验中采用的边界条件:流入处的边界值由粗网格确定,流出处的边界值由细网格确定^[8]。方程的差分格式用中央差,而内边界值用拉格朗日方法确定,差分方法和内边界值的确定不协调。这不仅使边界值计算很复杂,而且易于在内边界处产生不稳定,阻碍系统移动。

*本文是作者的研究生毕业论文的一部分。

文献[1]中提出的内边界条件和差分方程都是按拉格朗日方法导出的, 故两者是协调的, 都使用了空间分解准拉格朗日差分格式。为方便起见, 以下简称SQL格式。本文利用这一新的内边界条件和差分方程, 进行了正压原始方程套网格试验。

二、四种套网格试验方案

用 x 表示东西方向, y 表示南北方向。预报区域为正方形, 两邻边分别平行于 x 、 y 轴, 边长7200公里。粗网格复盖了整个区域(见图1)。格距 $\tilde{d} = 400$ 公里(式中带“ $\sim$ ”符号表示粗网格值, 下同), 粗网格区域取为: $-\tilde{9} \leq \tilde{i} \leq \tilde{9}$, $-\tilde{9} \leq \tilde{j} \leq \tilde{9}$ (i 、 j 分别表示 x 、 y 方向的格点数); 即图1中最外围细实线包括的正方形区域。细网格区域位于粗网格中央, 也是正方形, 格距 $d = 200$ 公里(式中不带“ $\sim$ ”符号表示细网格值, 下同)。细网格区域取为: $-\tilde{4} \leq \tilde{i} \leq \tilde{4}$, $-\tilde{4} \leq \tilde{j} \leq \tilde{4}$ (用粗网格值表示), 或 $-8 \leq i \leq 8$, $-8 \leq j \leq 8$ (用细网格值表示); 即图1中虚线所围的正方形区域。粗、细网格对应的时间步长有: $\Delta \tilde{t} = 2\Delta t = 600$ 秒。

1. 方程和定解条件

考虑地图放大因子的正压原始方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + m u \frac{\partial u}{\partial x} + m v \frac{\partial u}{\partial y} - f v &= -m \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + m u \frac{\partial v}{\partial x} + m v \frac{\partial v}{\partial y} + f u &= -m \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + m u \frac{\partial \phi}{\partial x} + m v \frac{\partial \phi}{\partial y} + m^2 \phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{m} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{m} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中的符号都是气象中常用的。

为方便起见, 设 $m = 1$, $f = 1.03 \times 10^{-4} \text{ 秒}^{-1}$, 则对应的SQL格式的差分方程为

$$\left. \begin{aligned} u_{i,j}^{\tau+1} &= L u_{i,j}^{\tau} + \Delta t f v_{i,j}^{\tau} - \frac{r}{2} \nabla_x \phi^{\tau} \\ v_{i,j}^{\tau+1} &= L v_{i,j}^{\tau} - \Delta t f u_{i,j}^{\tau} - \frac{r}{2} \nabla_y \phi^{\tau} \\ \phi_{i,j}^{\tau+1} &= L \phi_{i,j}^{\tau} - \frac{r}{4} \phi_{i,j}^{\tau} (\delta_{i,j}^{\tau} + \delta_{i,j}^{\tau+1}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中上标 τ 表示 t 时刻的时间步数, $r = \frac{\Delta t}{d}$, $\lambda_x = r u_{i,j}^{\tau}$, $\lambda_y = r v_{i,j}^{\tau}$, $\delta_{i,j}^{\tau} = u_{i+1,j}^{\tau} -$

$$- u_{i-1,j}^{\tau} + v_{i,i+1}^{\tau} - v_{i,i-1}^{\tau}, L u_{i,j}^{\tau} = (1 - \frac{\lambda_y}{2} \nabla_y + \frac{\lambda_y^2}{2} \nabla_y^2) (1 - \frac{\lambda_x}{2} \nabla_x +$$

$$+\frac{\lambda_x^2}{2}\nabla_x^2) u_{i,j}^r, \nabla_x u_{i,j}^r = u_{i+1,j}^r - u_{i-1,j}^r, \nabla_x^2 u_{i,j}^r = u_{i+1,j}^r - 2u_{i,j}^r + u_{i-1,j}^r. \text{ 其余}$$

符号类似可得。

利用(2)式计算时,应按逐点计算局部常量法。这次试验为了节省计算量,先x方向,后y方向分别逐排计算。这两者积分24小时所得结果非常接近,是因为 $\max(|\lambda_x|, |\lambda_y|) \ll 1$ 的缘故。连续方程对散度项采用了部分隐式。

与(1)式对应的半动量差分方程

$$\left. \begin{aligned} \overline{u}_t^x &= f v - (\overline{u}^x \overline{u}_x + \overline{v}^y \overline{u}_y + \overline{\phi}_x^x) \\ \overline{v}_t^y &= -f u - (\overline{u}^x \overline{v}_x + \overline{v}^y \overline{v}_y + \overline{\phi}_y^y) \\ \overline{\phi}_t^x &= -[\overline{u}^x \overline{\phi}_x + \overline{v}^y \overline{\phi}_y + \phi(\overline{u}_x^x + \overline{v}_y^y)] + \\ &\quad + \phi(\overline{u}_m^x + \overline{v}_m^y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 $\overline{u}^x = \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j})$, $\overline{u}_x = \frac{1}{d}(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j})$, 其它符号类推可得。

取下式流函数作为初始场

$$\psi_{i,j}^0 = -Udj + A \sin \frac{2\pi di}{L} \sin \frac{\pi dj}{D} \quad (4)$$

则初始风场可由上式中的流函数得到

$$\left. \begin{aligned} u_{i,j}^0 &= U - \frac{\pi A}{D} \sin \frac{2\pi di}{L} \cos \frac{\pi dj}{D} \\ v_{i,j}^0 &= \frac{2\pi A}{L} \cos \frac{2\pi di}{L} \sin \frac{\pi dj}{D} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

初始位势场可以经过求解平衡方程得到^[3]

$$\phi_{i,j}^0 = \phi_0 - fUdj + A f \sin \frac{2\pi di}{L} \sin \frac{\pi dj}{D} + \frac{A^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{D^2} \cos \frac{4\pi di}{L} + \frac{4\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi dj}{D} \right)$$

因上式右端最后一项与前三项相比很小,故略去不计。于是

$$\phi_{i,j}^0 = \phi_0 - fUdj + A f \sin \frac{2\pi di}{L} \sin \frac{\pi dj}{D} \quad (6)$$

在这次试验中,取 $U=20$ 米/秒, $A=(1.8/\pi)\times 10^7$ 米²/秒, $\phi_0=4.9\times 10^4$ 米²/秒², $L=3.6\times 10^6$ 米, $D=3.4\times 10^6$ 米。 ϕ 的初始场绘成图 1。

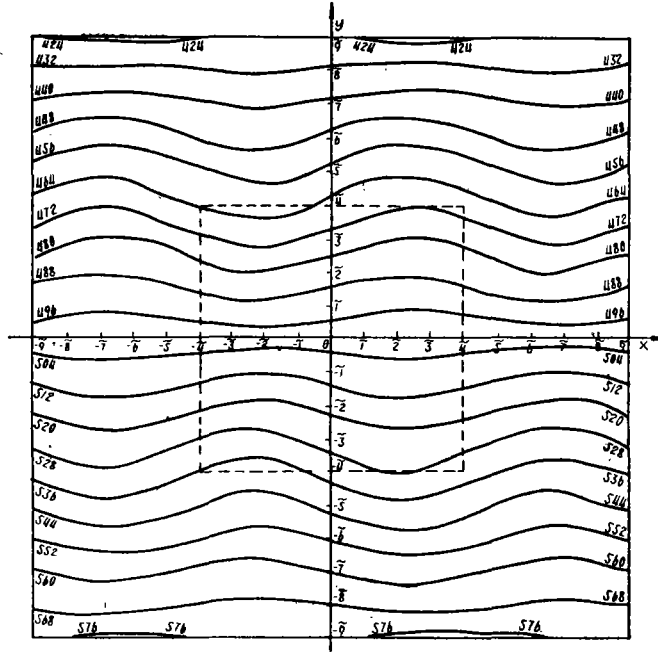


图 1 ϕ 的初始场 (单位: 位势什米, 下同)

粗网格在东西边界取循环边界条件, 在南北边界取下列条件:

$$\left. \begin{aligned} \overline{v} &= 0 \\ \overline{u}_t + \overline{u}^y \overline{u}_x &= -\overline{\phi}_x \\ f \overline{u} &= -\overline{\phi}_y \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

南北边界取在 $\tilde{j} = \pm 8\frac{1}{2}$ 处。

2. 四种套网格方案

下面用四种不同的方案进行试验。

方案一: 粗、细网格都采用半动量格式的差分方程(3)式。计算时采用最简单的“单向”方法, 粗网格给细网格提供边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } \tau \text{ 为奇数, } \tilde{\tau} = (\tau+1)/2, A_{i,j}^{\tau} &= A_{\tilde{i},\tilde{j}}^{\tilde{\tau}} \\ \text{当 } \tau \text{ 为偶数, } \tilde{\tau} = \tau/2, A_{i,j}^{\tau} &= (A_{\tilde{i},\tilde{j}}^{\tilde{\tau}} + A_{\tilde{i},\tilde{j}}^{\tilde{\tau}+1})/2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中初始时刻 $\tau = \tilde{\tau} = 1$, $i, j, \tilde{i}, \tilde{j}$ 分别沿内边界取值。

方案二：粗、细网格都采用SQL格式的差分方程(2)式。令 $u_{i,j}^*, v_{ij}^*, \phi_{i,j}^*$ 分别表示(2)式右端第一项，则在边界上

$$\left. \begin{aligned} \text{流入处,} \quad u_{i,j}^* &= L u_{\tilde{i}, \tilde{j}}^{\tilde{\tau}} \\ \text{流出处,} \quad u_{i,j}^* &= L u_{i,j}^{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

在西边界处,

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } u_{-8,j} \geq 0 \quad \nabla_x u_{-4,j}^{\tilde{\tau}} &= 3 u_{-4,j}^{\tilde{\tau}} + u_{-6,j}^{\tilde{\tau}} - 4 u_{-5,j}^{\tilde{\tau}} \\ \nabla_x^2 u_{-4,j}^{\tilde{\tau}} &= u_{-4,j}^{\tilde{\tau}} + u_{-6,j}^{\tilde{\tau}} - 2 u_{-5,j}^{\tilde{\tau}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } u_{-8,j} \leq 0 \quad \nabla_x u_{-8,i}^{\tau} &= 4 u_{-7,i}^{\tau} - u_{-6,i}^{\tau} - 3 u_{-8,i}^{\tau} \\ \nabla_x^2 u_{-8,i}^{\tau} &= u_{-8,i}^{\tau} + u_{-6,i}^{\tau} - 2 u_{-7,i}^{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

而算子 ∇_x, ∇_y^2 等仍按(2)式计算。

同理，可得其它边界处 $\nabla_x, \nabla_x^2, \nabla_y, \nabla_y^2$ 的计算公式。 $v_{i,j}^*, \phi_{i,j}^*$ 类似得到。

在内边界处，(2)式右端最后一项，即气压梯度力项和散度项采用二阶不等距差分计算。

$$\left. \begin{aligned} \text{如 } \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{-8,j}^{\tau} &\simeq \frac{1}{6d} \left(4 \phi_{-7,i}^{\tau} - 3 \phi_{-8,i}^{\tau} - \phi_{-5,i}^{\tau} \right) \quad \text{在西边界处} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{8,j}^{\tau} &\simeq \frac{1}{6d} \left(\phi_{5,j}^{\tau} + 3 \phi_{8,j}^{\tau} - 4 \phi_{7,j}^{\tau} \right) \quad \text{在东边界处} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

类似可以推出 $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ 和散度项的二阶不等距差分公式。

由于粗、细网格的时间步长不同， τ 为偶数时没有对应的粗网格值，用粗网格值线性内插得到，即

$$u_{\tilde{i}, \tilde{j}}^{\tau} = \frac{1}{2} \left(u_{\tilde{i}, \tilde{j}}^{\tilde{\tau}} + u_{\tilde{i}, \tilde{j}}^{\tilde{\tau}+1} \right) \quad (13)$$

对于内边界处没有粗网格格点对应的细网格格点值,按牛顿二阶向前插值公式求得,如

$$u_{-3,j}^{\tau} = \frac{1}{8} (3u_{-4,j}^{\tau} + 6u_{-2,j}^{\tau} - u_{0,j}^{\tau}) \quad (14)$$

方案三:在方案一的基础上,再用 Davies 的“松弛区域”法,即在(3)式中每个方程右端加上一松弛项。此松弛项采用隐式。如在第一个方程右端加上 $-k_{i,j} \Delta t (u_{i,j}^{\tau+1} - \tilde{u}_{i,j}^{\tau+1})$, 其余两个方程与此类似。松弛系数 $k_{i,j}$ 在边界上取 $6.0 \times 10^{-3} \text{秒}^{-1}$, 当在 x 、 y 两个方向离内边界都大于4个格距时, $k_{i,j} = 0$ 。

方案四:在方案二的基础上,再用 Davies 的“松弛区域”法,与方案三相同。

三、试验结果

1. 粗网格的情况

时间步长取10分钟,不论用准拉格朗日格式或半动量格式计算,每步都用下式

$$\hat{u}_{i,j}^{\tau} = u_{i,j}^{\tau} + \alpha \times (u_{i,j}^{\tau+1} - 2u_{i,j}^{\tau} + u_{i,j}^{\tau-1})$$

进行时间平滑, v 、 ϕ 的时间平滑公式与 u 相似。 α 是平滑系数。用这两种格式积分了24小时和48小时,计算稳定。两种格式计算所得的结果基本一致。其 u 场高、低值中心, v 场的正、负中心和 ϕ 场的槽脊24小时都向东移动了4个格距(即1600公里)。平均移速约18.5米/秒,略小于基本气流速度。 u 、 ϕ 场的波幅24小时基本没有衰减,而 v 场24小时都有点衰减。见图2(用半动量格式作出的24小时粗网格 ϕ 场预报,图略)。

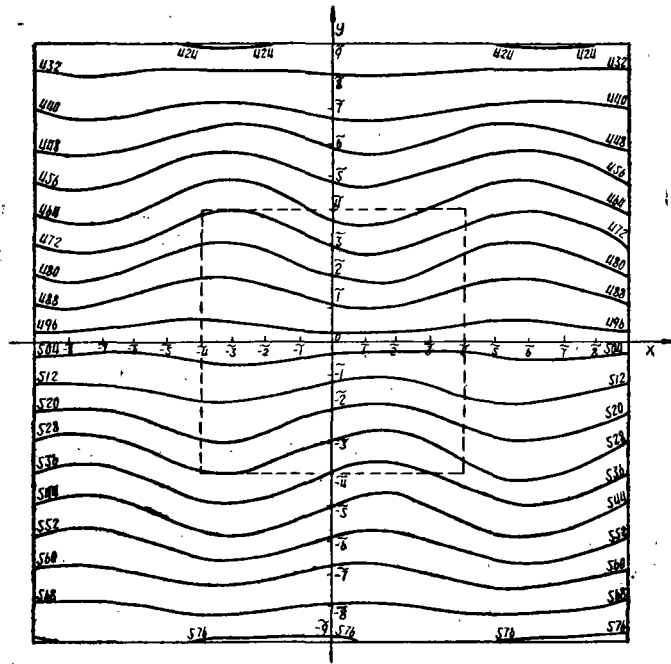


图2 用SQL格式作出的24小时粗网格 ϕ 场预报

2. 细网格的情况

方案一的细网格, 与用半动量格式计算的粗网格相套, 采用的时间平滑与粗网格相同。用方案一作出的24小时细网格 u 、 v 、 ϕ 三个场预报, 都在东侧流出处产生了二倍格距的短波, 在东南、东北两个角尤其明显。这两个角的边界都是流出处。 ϕ 、 u 两个场在西侧流入处尚光滑、平缓。而 v 场全部破坏。见图 3。上述这个结果可以根据文献[4]中所得的结论来解释, Charney在[4]中证明了正压原始方程的边界条件, 只能在流入处规定两个条件, 在流出处规定一个条件, 若规定过多的边界条件会产生不稳定。因此, 方案一的细网格边界条件规定得太多, 则易于出现不稳定。从另一个方面看, 方案一相当于固定边界条件, 根据文献[1]中的讨论, 两端取固定边界条件, 在流入处波动趋于平缓, 在流出处波动产生不稳定。方案一中的 u 、 ϕ 场24小时预报, 正验证了这一点。

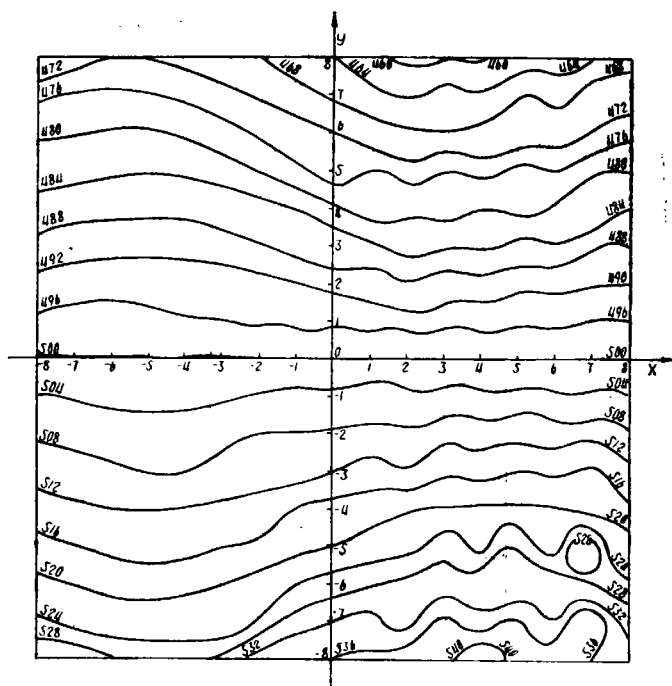


图 3 用方案一作出的24小时细网格 ϕ 场预报

方案二的细网格, 与用准拉格朗日格式计算的粗网格相套, 采用的时间平滑与粗网格相同, 并作了空间平滑。用方案二作出的24小时细网格 u 、 v 、 ϕ 三个场预报, 不仅去除了东侧流出处的二倍格距短波, 而且在整个细网格区域都较稳定。与方案一相比有了很大的改善。这也证明了方案二的内边界条件和SQL格式配合使用, 是可以克服内边界附近的二倍格距的短波。见图 4。细网格的 u 场高低值中心和 v 场的正负中心24小时向东移动的距离与粗网格差不多, ϕ 场的槽脊24小时比粗网格多东移 200 公里。 v 、 ϕ 两个场波幅24小时与初始场相比基本没有衰减, 和粗网格差不多。 u 场的波幅衰减较大, 24米/秒的等值线包围的区域与初始场相比, 明显减小, 且比粗网格衰减强得多。

方案三的细网格, 和方案一相同, 也与用半动量格式计算的粗网格相套。每步作了

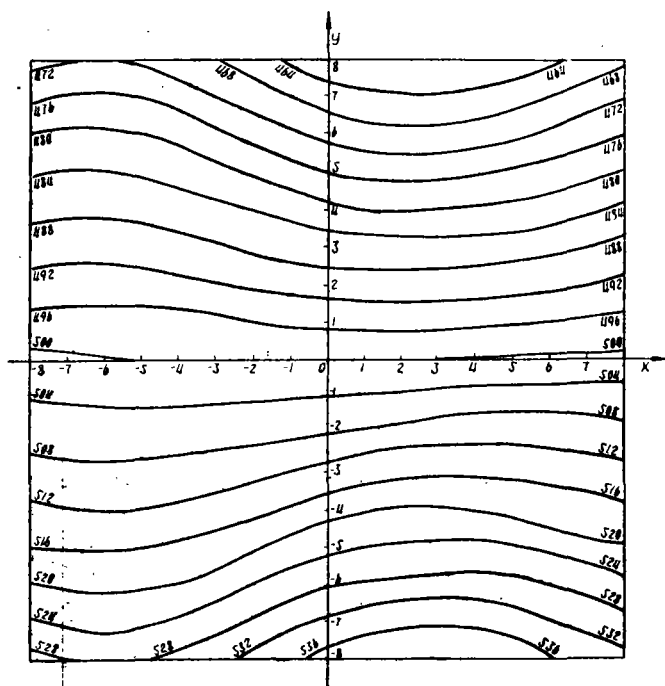


图 4 用方案二作出的24小时细网格 ϕ 场预报

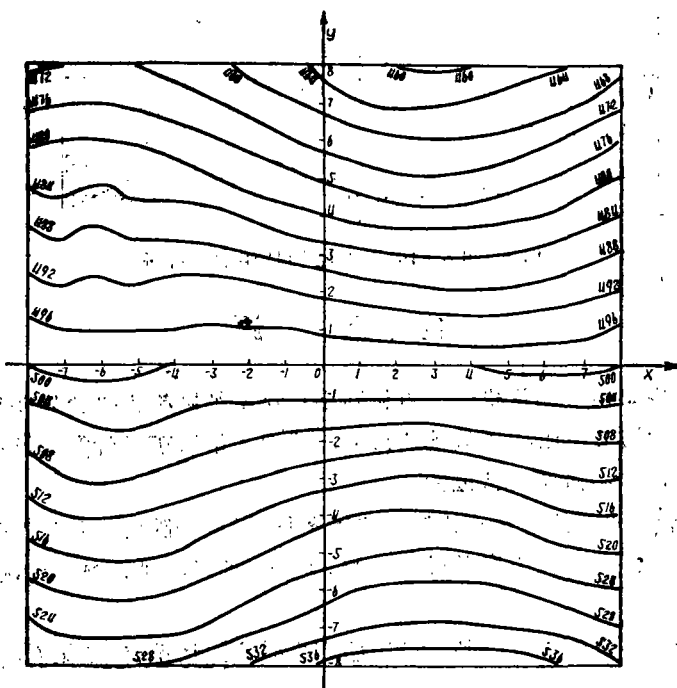


图 5 用方案三作出的24小时细网格 ϕ 场预报

空间平滑。用方案三作出的24小时细网格 v 场预报在南北边界处附近出现二倍格距波为主的寄生波,用此方案作出的24小时细网格 u 、 ϕ 场预报基本上稳定, ϕ 场东侧流出处只看到很小的寄生波。三个场波速与方案二差不多, u 、 v 场波幅有些不稳定增长, ϕ 场波幅与初始场差不多(如图5),该方案虽比方案一有些改进,但仍不能令人满意。

方案四的细网格,和方案二一样,也与用准拉格朗日格式计算的粗网格相套。每步作了空间平滑。用方案四作出的24小时细网格 u 、 v 、 ϕ 三个场预报在东侧流出处也没有出现二倍格距的短波,并且在整个细网格区域比方案二更为稳定。 u 场的高低值中心移速比方案二快,波幅衰减也比方案二小得多。 ϕ 场的槽脊都比方案二有所加强, v 场情况与方案二差不多(如图6)。

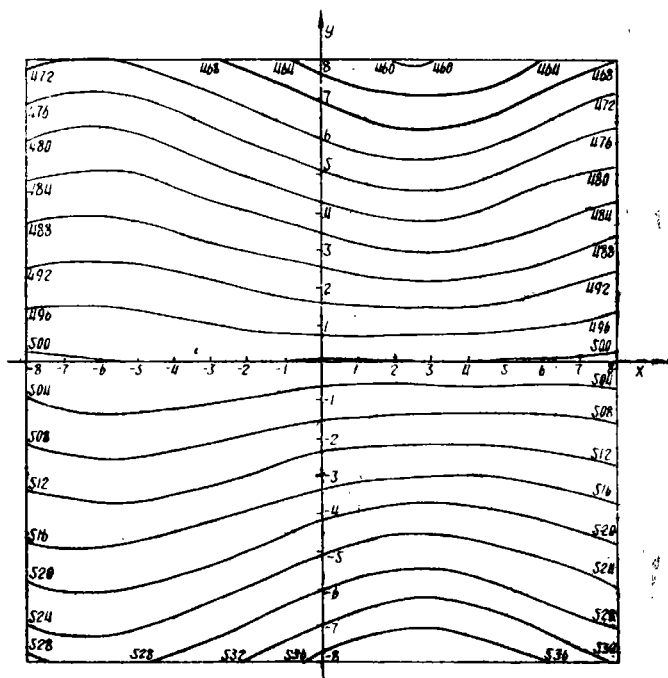


图 6 用方案四作出的24小时细网格 ϕ 场预报

四、结 语

粗、细网格均采用半动量格式,由粗网格直接给细网格提供边界条件,在流出处附近产生二倍格距的短波,阻碍了系统的流入、流出,最后破坏计算。这是由于这种内边界条件和方程的性质不协调所造成的。

采用SQL格式和与该格式一致的内边界条件,可以去除流出处的二倍格距的短波,流出和流入也较好。如在该方案基础上,和Davies的“松弛区域”法相结合,则效果还要好些。

这一套方法还可进一步推广到多层原始方程模式的情况,但结果有待于进一步试验。

本文承国家气象局气象科学研究院研究员廖洞贤先生指导,在此谨表谢意。

参 考 文 献

- [1] 廖洞贤、陆维松, 有限区域预报中的一些问题, 气象学报, 第40卷第4期, 387—397, 1982.
- [2] Davies, H.C., A lateral boundary for multilevel prediction models, Q. J. Roy. Meteor. Soc., Vol. 102, No. 432, 405—418, 1976.
- [3] Charney, J.G., The use of the primitive equations of motion in numerical prediction, Tellus, Vol. 7, No. 1, 22—26, 1955.
- [4] Charney, J. G., Integration of the primitive and balance equations, Proc. Int. Symp. on N. W.P. Tokyo, 131—152, 1960.
- [5] Davies, H. C., On the lateral boundary conditions for the primitive equations, J. Atmos. Sci., Vol. 30, No. 2, 147—150, 1973.
- [6] Phillips, N. A. and J. Shukla, On the strategy of combining coarse and fine grid meshes in numerical weather prediction, J. Appl. Meteor., Vol. 12, No. 5, 763—770, 1973.
- [7] 廖洞贤, 论半球预报的水平侧边界条件, 第二次全国数值天气预报会议论文集, 223—235, 科学出版社, 1980.
- [8] Shapiro, M. A. and J. J. O'Brien, Boundary conditions for fine-mesh limited-area forecasts, J. Appl. Meteor., Vol. 9, No. 3, 345—349, 1970.

NESTED GRID EXPERIMENTS FOR THE BAROTROPIC PRIMITIVE EQUATION

Lu Weisong

ABSTRACT

Nested grid experiments are made for the barotropic primitive equation by a one-way interaction method. The quasi-Lagrangian difference scheme by space factorization is used for both fine and coarse grids and the interfacial boundary conditions (Scheme 2) proposed by Liao Dong-xian et al. Scheme 2 is in keeping with the said difference scheme. Experiments show that in the 24-hr fine grid forecasts by Scheme 2 the inflow and outflow in the system with the unstability at the outflow eliminated are better than those by the half-momentum scheme and the interfacial boundary conditions directly provided for the fine grid by the coarse grid (Scheme 1). Scheme 2 and Scheme 1, when combined with the method of Davies's "Relaxation Regions", become Scheme 4 and Scheme 3, respectively. The results are much the same as those by using Scheme 1 and Scheme 2. It is found that Scheme 4 is a little better than Scheme 2.