杨兴东, 周月军, 何青泉, 等. 矩阵方程 $A^{T}XA=D$ 扰动分析 [J]. 南京气象学院学报, 2008, 31(3): 447-451.

矩阵方程 $A^{T}XA=D$ 扰动分析

杨兴东, 周月军, 何青泉, 邵保刚
(南京信息工程大学 数理学院,江苏 南京　210044)

摘要: 利用矩阵分块与矩阵范数的性质, 研究矩阵方程 $A^{T}XA=D$, 获得该方程的扰动界, 这些结果可用于模型修正中的数值计算。

关键词: 矩阵方程; 对称解; 正定解; 扰动
中图分类号: O 151. 21　　文献标识码: A　　文章编号: 1000-2022(2008)03-0447-05

Perturbation Analysis for the Matrix Equation $A^{T}XA=D$

YANG Xing-dong, ZHOU Yue-jun, HE Qing-quan, SHAO Bao-gang
(School of Mathematics and Physics, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract: We deal with the matrix equation $A^{T}XA=D$ and establish the perturbation bounds by using the patitioned matrix and the properties of the matrix norms. The results can be used in numerical calculation in model updating.

Key words: matrix equation; symmetry solution; positive definite solution; perturbation

0 引言

1996年 Dai等[1-2]研究了来源于工程中振动反问题的矩阵方程, 他们分别对实对称及实对称半正定矩阵全体研究了矩阵方程

$$A^{T}XA=D \tag{1}$$

的最小二乘解。廖安平等[3]研究了它的双对称最小二乘解, 之后又获得了矩阵方程 $A^{T}XA+B^{T}YB=C$ 的对称与反对称最小范数最小二乘解[4]。邓远北等[5]给出线性流形上矩阵方程(1)的反对称解和反对称最佳逼近解。关于方程(1)的反对称解、反对称正交对称解的研究, Peng等[6-8]获得一系列成果。矩阵方程(1)在结构模型修正以及工程振动反问题中有重要应用[1]。本文对矩阵方程(1)进行扰动分析, 获得矩阵方程(1)的扰动界, 这些结果是对文献[3]的补充, 方便于模型修正中的数值计算。

本文用 $P^{m\times n}$ 表示数域 P 上 $m\times n$ 矩阵的全体, A^{T} 为矩阵 A 的转置, $A\geqslant 0$ 表示矩阵 A 为实对称半正定矩阵, $\mathrm{rank}(A)$ 表示矩阵 A 的秩, A^{+} 表示矩阵 A 的 Moore-Penrose逆, $\lambda_1(A)\geqslant\lambda_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$ 表示 n 阶实对称矩阵 A 的特征值的降序排列。$\|\ \|_2$ 为向量或矩阵的 2-范数, $\|\ \|_F$ 表示矩阵的 Frobenius范数。I 代表单位矩阵。

1 若干引理

引理 1[9-10]　设 $A\in C^{m\times n}$, $B\in C^{p\times q}$, $C\in C^{m\times q}$, 矩阵方程

$$AXB=C$$

有解的充分必要条件是

$$AA^{+}CB^{+}B=C,$$

收稿日期: 2007-03-23; 改回日期: 2007-06-12
基金项目: 南京信息工程大学科研基金资助项目(Y630)
作者简介: 杨兴东(1958—), 男, 硕士, 教授, 研究方向为数值代数, magfy5861@163.com.

并且在有解的情况下, 其通解为

$$X = A^{+} CB^{+} + Y - A^{+} AYBB^{+}。$$

其中 $Y \in C^{n \times p}$是任意的。

引理 2 设 $A \in R^{m \times n}, D^{T} = D \in R^{n \times n}$, 令

$$\mathrm{H} = \{H \in R^{m \times m} \mid H^{T} = H, A^{T}HA = D\},$$

$$\eta = \{(A^{T})^{+} DA^{+} + T - AA^{+} TAA^{+} \mid T^{H} = T \in R^{m \times m}\},$$

则当且仅当 A 和 D 满足 $A^{+}ADA^{+}A = D$ 时, $\mathrm{H} \neq \Phi$, 并且当 $\mathrm{H} \neq \Phi$时, 有 $\mathrm{H} = \eta$。

证明 必要性。如果 $\mathrm{H} \neq \Phi$, 即矩阵方程 $A^{T}HA = D$ 有对称矩阵解 H, 则由引理 1知, A 和 D 满足 $A^{T}(A^{T})^{+}DA^{+}A = D$, 即 $A^{+}ADA^{+}A = D$。

反过来, 如果 A 和 D 满足 $A^{+}ADA^{+}A = D$, 即 $A^{T}(A^{T})^{+}DA^{+}A = D$, 则由引理 1知, 矩阵方程 $A^{T}HA = D$ 相容, 其通解为

$$\begin{aligned} H &= (A^{T})^{+} DA^{+} + T - (A^{T})^{+} A^{T}TAA^{+} = \\ &(A^{T})^{+} DA^{+} + T - (AA^{+})^{T}TAA^{+} = (A^{T})^{+} DA^{+} + T - AA^{+} TAA^{+}, \end{aligned}$$

其中 T是任意的实对称矩阵。由 $(A^{T})^{+}DA^{+} + T - AA^{+}TAA^{+}$是实对称矩阵, 即得 $\mathrm{H} = \eta$。证毕。

设 $A \in R^{m \times n}$, 其奇异值分解为

$$A = U\begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}V^{T}。\tag{2}$$

其中 $U = [U_1, U_2] \in R^{m \times m}$, $V = [V_1, V_2] \in R^{n \times n}$均为正交矩阵, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) > 0$, $r = \mathrm{rank}(A)$, $U_1 \in R^{m \times r}$, $V_1 \in R^{n \times r}$。

引理 3[1] 设 $A \in R^{m \times n}, D^{T} = D \in R^{n \times n}$, A 的奇异值分解为(2)式, 则矩阵方程

$$A^{T}XA = D$$

有实对称半正定解的充要条件是

$$A^{+}ADA^{+}A = D \geqslant 0,$$

并且在有解的情况下, 矩阵方程(1)的对称半正定解通解为

$$X = U\begin{pmatrix} X_0 & P_{X_0}X_{12} \\ X_{12}^{T}P_{X_0} & X_{12}^{T}X_0^{+}X_{12} + X_{22} \end{pmatrix}U^{T}。$$

其中 $X_0 = \Sigma^{-1}V_1^{T}DV_1\Sigma^{-1}$, $X_{12} \in R^{r \times (m-r)}$是任意的, X_{22}是任意的 $m-r$阶对称半正定矩阵。

引理 4 设 $A \in R^{m \times n}, D^{T} = D \in R^{n \times n}$, A 的奇异值分解为(2)式, 则矩阵方程

$$A^{T}XA = D \tag{3}$$

有实对称正定解的充要条件是

$$A^{+}ADA^{+}A = D \geqslant 0, \quad \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(D),$$

并且在有解的情况下, 矩阵方程(3)的对称正定解通解为

$$X = U\begin{pmatrix} X_0 & X_{12} \\ X_{12}^{T} & X_{12}^{T}X_0^{-1}X_{12} + X_{22} \end{pmatrix}U^{T}。\tag{4}$$

其中 $X_0 = \Sigma^{-1}V_1^{T}DV_1\Sigma^{-1}$, $X_{12} \in R^{r \times (n-r)}$是任意的, X_{22}是任意的 $n-r$ 阶对称正定矩阵。

证明 必要性。如果矩阵方程(3)有实对称正定解 H, 则 $A^{T}HA = D$。由引理 2知, A 和 D 满足 $A^{+}ADA^{+}A = D$, 并且 $H = H_1^{T}H_1$, $H_1 > 0$, 则 $D = (H_1A)^{T}(H_1A) \geqslant 0$, 从而 $\mathrm{rank}(D) = \mathrm{rank}(H_1A) = \mathrm{rank}(A)$。

充分性。设 A 的奇异值分解为(2)式, 记

$$V^{T}DV = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix},$$

其中 D_{11}为 r阶方阵。由 $A^{+}ADA^{+}A = D \geqslant 0$, 得

$$V^{T}DV = \begin{pmatrix} D_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rank}(D) = \mathrm{rank}(D_{11}) = r,$$

从而 $\boldsymbol{D}_{11}$为实对称正定矩阵。令

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \Sigma^{-1}\boldsymbol{D}_{11}\Sigma^{-1} & \boldsymbol{X}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{12}^{T} & \boldsymbol{X}_{12}^{T}\boldsymbol{D}_{11}^{-1}\boldsymbol{X}_{12} + \boldsymbol{X}_{22} \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{T},$$

其中 $\boldsymbol{X}_{12}\in \boldsymbol{R}^{r\times(n-r)}$是任意的, $\boldsymbol{X}_{22}$是任意的 $n-r$ 阶对称正定矩阵, 则 $\boldsymbol{X}$ 为矩阵方程 (3)的对称正定解。证毕。

引理 5[9]　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}\in \boldsymbol{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$, 如果 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$, 并且 $\|\boldsymbol{A}^{+}\|_2\|\boldsymbol{E}\|_2 < 1$, 则

$$\|\boldsymbol{A}^{+}\|_2 \leqslant \frac{\|\boldsymbol{A}^{+}\|_2}{1 - \|\boldsymbol{A}^{+}\|_2\|\boldsymbol{E}\|_2},$$

$$\frac{\|\boldsymbol{A}^{+} - \boldsymbol{A}^{+}\|_2}{\|\boldsymbol{A}^{+}\|_2} \leqslant \frac{\sqrt{3}\kappa_2(\boldsymbol{A})\dfrac{\|\boldsymbol{E}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2}}{1 - \kappa_2(\boldsymbol{A})\dfrac{\|\boldsymbol{E}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2}},$$

其中 $\kappa_2(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^{+}\|_2$。

2　矩阵方程 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$ 扰动分析

定理 1　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}\in \boldsymbol{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{F}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$是对称矩阵, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}$, 且 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 满足如下条件,

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m, \quad \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D},$$

$\boldsymbol{X}$ 为矩阵方程 (1)的对称解, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}$ 为矩阵方程

$$\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} \tag{5}$$

的对称解, 则

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{X}\|_2}{\|\boldsymbol{X}\|_2} \leqslant \|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{+}\|_2^2\left(\frac{\|\boldsymbol{A}\|_2^2\|\boldsymbol{F}\|_2}{\|\boldsymbol{D}\|_2} + \|\boldsymbol{E}\|_2(2\|\boldsymbol{A}\|_2 + \|\boldsymbol{E}\|_2)\right)。\tag{6}$$

进一步, 如果 $\|\boldsymbol{A}^{+}\|_2\|\boldsymbol{E}\|_2 < 1$, 则

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{X}\|_2}{\|\boldsymbol{X}\|_2} \leqslant \left[\frac{\kappa_2(\boldsymbol{A})}{1 - \kappa_2(\boldsymbol{A})\dfrac{\|\boldsymbol{E}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2}}\right]^2\left(\frac{\|\boldsymbol{F}\|_2}{\|\boldsymbol{D}\|_2} + \frac{\|\boldsymbol{E}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2}\left(2 + \frac{\|\boldsymbol{E}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2}\right)\right), \tag{7}$$

其中 $\kappa_2(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^{+}\|_2$。

证明　由引理 2, 矩阵方程 (1)和 (5)均有唯一对称解。设 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}$ 为矩阵方程 (5)的对称解, 则

$$(\boldsymbol{A}^{T} + \boldsymbol{E}^{T})(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{F},$$

即

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{T}\Delta\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{T}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}^{T}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E} \triangleq \boldsymbol{G}。\tag{8}$$

因为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$, 所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{+} = \boldsymbol{I}_m$, 从而由 (8)式得

$$\Delta\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{+T}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{+}。$$

因此,

$$\|\Delta\boldsymbol{X}\|_2 \leqslant \|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{+}\|_2^2\|\boldsymbol{G}\|_2 \leqslant$$

$$\|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{+}\|_2^2(\|\boldsymbol{F}\|_2 + 2\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{E}\|_2\|\boldsymbol{X}\|_2 + \|\boldsymbol{E}\|_2^2\|\boldsymbol{X}\|_2)。$$

注意, $\|\boldsymbol{D}\|_2 = \|\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_2^2\|\boldsymbol{X}\|_2$, 由上式即得 (6)式。

由 (6)式及引理 2即得 (7)式。证毕。

注记 1　当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) < m$ 时, 矩阵方程 (1)解的相对误差$\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{X}\|_2}{\|\boldsymbol{X}\|_2}$可能无界。

事实上, $\boldsymbol{X}$ 为矩阵方程 (1)的对称解, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}$ 为矩阵方程 (5)的对称解, 由 (8)式, 引理 1与引理 2得

$$\Delta\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{+T}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{+} + \boldsymbol{T} - (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{+}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{+},$$

其中 $\boldsymbol{T}$是任意的m 阶对称矩阵。可见矩阵方程 (8)的解不唯一。$\boldsymbol{T}$的任意性可使 $\|\Delta\boldsymbol{X}\|_2$任意大。

设 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的奇异值分解为

$$A + E = U\begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix} V^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

其中 $U = [U_1, U_2] \in R^{m\times m}$, $V = [V_1, V_2] \in R^{n\times n}$均为正交矩阵, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) > 0$, $r = \mathrm{rank}(A + E) < m$, $U_1 \in R^{m\times r}$, $V_1 \in R^{n\times r}$。

令

$$S = (A + E)^{+\mathrm{T}} G (A + E)^{+}, \quad U^{\mathrm{T}} T U = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^{\mathrm{T}} & X_4 \end{pmatrix} \in R^{m\times m},$$

其中 X_1, X_4 分别是 $r, m-r$阶对称矩阵, $X_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in R^{r\times(m-r)}$, $a > \| S \|_2$, 则

$$\| T - (A + E)(A + E)^{+} T (A + E)(A + E)^{+} \|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & X_2 \\ X_2^{\mathrm{T}} & X_4 \end{pmatrix} \right\|_2 =$$

$$\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}\left(\begin{pmatrix} X_2 X_2^{\mathrm{T}} & X_2 X_4 \\ X_4 X_2^{\mathrm{T}} & X_2^{\mathrm{T}} X_2 + X_4^2 \end{pmatrix}\right) \geqslant \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(X_2 X_2^{\mathrm{T}}) = a > \| S \|_2。$$

所以

$$\| \Delta X \|_2 \geqslant | \, \| S \|_2 - \| T - (A + E)(A + E)^{+} T (A + E)(A + E)^{+} \|_2 \, | =$$

$$\| T - (A + E)(A + E)^{+} T (A + E)(A + E)^{+} \|_2 - \| S \|_2 \geqslant a - \| S \|_2 \to +\infty \, (a \to +\infty)。$$

然而, 如果考虑矩阵方程(1)的极小 F-范数对称解[10], 则其极小 F-范数对称解是唯一的, 即为

$$X = A^{+\mathrm{T}} D A^{+}。$$

定理 2 设 $A, E \in R^{m\times n}$, $D, F \in R^{n\times n}$是对称矩阵, $A = A + E$, $D = D + F$, 且 A, D, A 和 D 满足如下条件,

$$A^{+} A D A^{+} A = D, \quad A^{+} A D A^{+} A = D,$$

X 为矩阵方程(1)的极小 F-范数对称解, $X = X + \Delta X$ 为矩阵方程(5)的极小 F-范数对称解。如果 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A)$, 并且 $\| A^{+} \|_2 \| E \|_2 < 1$, 则

$$\frac{\| \Delta X \|_2}{\| X \|_2} \leqslant 2\sqrt{3}\left[\frac{\kappa_2(A)}{1 - \kappa_2(A)\dfrac{\| E \|_2}{\| A \|_2}}\right]^2 \left(1 + \frac{\| F \|_2}{\| D \|_2}\right) \| E \|_2 + (\kappa_2(A))^2 \frac{\| F \|_2}{\| D \|_2}。 \tag{10}$$

其中 $\kappa_2(A) = \| A \|_2 \| A^{+} \|_2$。

证明 由引理 2知, 矩阵方程(1)和(5)均相容, 则相应的唯一极小 F-范数对称解分别为

$$X = A^{+\mathrm{T}} D A^{+}, \quad X = X + \Delta X = A^{+\mathrm{T}} D A^{+}。$$

从而

$$\begin{aligned} \Delta X &= A^{+\mathrm{T}} D A^{+} - A^{+\mathrm{T}} D A^{+} \\ &= (A^{+} - A^{+})^{\mathrm{T}} D A^{+} + A^{+\mathrm{T}} D (A^{+} - A^{+}) + A^{+\mathrm{T}} F A^{+}, \end{aligned}$$

于是

$$\| \Delta X \|_2 \leqslant \| A^{+} - A^{+} \|_2 \| D \|_2 (\| A^{+} \|_2 + \| A^{+} \|_2) + \| A^{+} \|_2^2 \| F \|_2。$$

由 $\| D \|_2 \leqslant \| A \|_2^2 \| X \|_2$ 和引理 4, 得

$$\frac{\| \Delta X \|_2}{\| X \|_2} \leqslant 2\sqrt{3} \| A^{+} \|_2 \left[\frac{\kappa_2(A)}{1 - \kappa_2(A)\dfrac{\| E \|_2}{\| A \|_2}}\right]^2 \left(1 + \frac{\| F \|_2}{\| D \|_2}\right) \| E \|_2 + (\kappa_2(A))^2 \frac{\| F \|_2}{\| D \|_2}。$$

定理 3 设 $A, E \in R^{m\times n}$, $D, F \in R^{n\times n}$是对称矩阵, $A = A + E$, $D = D + F$, 且 A, D, A 和 D 满足如下条件

$$A^{+} A D A^{+} A = D \geqslant 0, \quad A^{+} A D A^{+} A = D \geqslant 0,$$

X 是矩阵方程(1)的任一非零对称半正定矩阵解。记 $G = F - A^{\mathrm{T}} X E - E^{\mathrm{T}} X A - E^{\mathrm{T}} X E$, 并设 $A^{+} A G A^{+} A = G \geqslant 0$, 则矩阵方程

$$A^{T}YA = D \tag{11}$$

存在对称半正定矩阵解 $X = X + \Delta X$, 使得

$$\frac{\|\Delta X\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \left(\frac{\|A\|_2}{\sigma_r}\right)^2 \left(\frac{\|F\|_2}{\|D\|_2} + \frac{\|E\|_2}{\|A\|_2}\left(2 + \frac{\|E\|_2}{\|A\|_2}\right)\right), \tag{12}$$

其中 σ_r 为 $A + E$ 最小非零奇异值。

证明　设 $A + E$ 的奇异值分解为(9), 则由引理 3, 扰动方程(8)的对称半正定解

$$\Delta X = U\begin{pmatrix} X_0 & P_{X_0}X_{12} \\ X_{12}^{T}P_{X_0} & X_{12}^{T}X_0^{+}X_{12} + X_{22} \end{pmatrix}U^{T},$$

其中 $X_0 = \Sigma^{-1}V_1^{T}GV_1\Sigma^{-1}$, $X_{12} \in R^{r\times(m-r)}$ 是任意的, X_{22}是任意的 $m-r$ 阶对称半正定矩阵。取 $X_{12} = 0 \in R^{r\times(n-r)}$, $X_{22} = 0 \in R^{(m-r)\times(m-r)}$, 则

$$\Delta X = U\begin{pmatrix} X_0 & O \\ O & O \end{pmatrix}U^{T},$$

为扰动方程(8)的极小 F-范数解, 并且

$$\|\Delta X\|_2^2 = \|X_0\|_2^2 = \lambda_{\max}(\Sigma^{-1}V_1^{T}GV_1\Sigma^{-1})^2。$$

注意 $X_0 = \Sigma^{-1}V_1^{T}GV_1\Sigma^{-1} \geqslant 0$, 所以

$$\|\Delta X\|_2^2 = \lambda_{\max}^2(\Sigma^{-1}V_1^{T}GV_1\Sigma^{-1}) = \lambda_{\max}^2(V_1^{T}GV_1\Sigma^{-2}) \leqslant$$
$$\lambda_{\max}^2(G)\lambda_{\max}^2(\Sigma^{-2}) = \|G\|_2^2\sigma_r^{-4},$$

从而 $\|\Delta X\|_2 \leqslant \|G\|_2\sigma_r^{-2}$。由于

$$\|G\|_2 \leqslant \|F\|_2 + 2\|A\|_2\|E\|_2\|X\|_2 + \|E\|_2^2\|X\|_2,\quad \|D\|_2 \leqslant \|A\|_2^2\|X\|_2,$$

故

$$\frac{\|\Delta X\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \sigma_r^{-2}\left(\frac{\|F\|_2\|A\|_2^2}{\|D\|_2} + \|E\|_2(2\|A\|_2 + \|E\|_2)\right),$$

由上式即得(12)式。证毕。

致谢: 南京航空航天大学博士生导师戴华教授对本文做了悉心指导, 谨致谢忱。

参考文献:

[1] Dai Hua, Lancaster P. Linear matrix equation from an inverse problem of vibration theory[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1996, 246(1): 31-47.

[2] Dai Hua. On the symmetric solutions of linear matrix equations[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1990, 131(1): 1-7.

[3] 廖安平, 白中治. 矩阵方程 $A^{T}XA = D$ 的双对称最小二乘解[J]. 计算数学, 2002, 24(1): 9-20.

[4] 廖安平, 白中治. 矩阵方程 $A^{T}XA + B^{T}YB = C$ 的对称与反对称最小范数最小二乘解[J]. 计算数学, 2005, 27(1): 81-95.

[5] 邓远北, 胡锡炎. 线性流形上矩阵方程 $B^{T}XB = D$ 的反对称解[J]. 数学物理学学报, 2004, 24A(4): 459-463.

[6] Peng Xiangyang. Central symmetric solutions and the optimal approximation of equation $A^{T}XA = B$[J]. Journal of Changsha Eletric Power College, 2002, 17(2): 3-6.

[7] Peng Xiangyang, Hu Xiyan, Zhang Lei. Symmetric ortho-symmetric solutions and the optimal approximation of equation $A^{T}XA = B$[J]. Numer Math J Chinese Univ, 2003, 25(4): 372-377.

[8] Peng Xiangyang, Hu Xiyan, Zhang Lei. Symmetric orthogonal anti-symmetric solutions of matrix equation $A^{T}XA = B$ and the optimal approximation[J]. Journal of Jinon Univ, 2004, 18(4): 342-346.

[9] 孙继广. 矩阵扰动分析[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2001.

[10] 戴华. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2001.